

XX^e Festival d'astronomie de Fleurance
FIL NOIR ASTROMATH



Histoires d'instabilités

Jérôme Perez

Laboratoire de Mathématiques Appliquées de l'ENSTA
Laboratoire Univers & Théories de l'observatoire de Meudon

Aout 2010



1 Instabilité de Jeans

1.1 Par le viriel.

On considère un système autogravitant à l'équilibre. Nous supposons qu'il est sphérique de rayon R , isotherme à la température θ , qu'il est constitué de N éléments de masse μ , on notera $M = N\mu$ sa masse totale. Son énergie cinétique totale K et son énergie potentielle totale W vérifient le théorème du viriel¹

$$2K + W = 0$$

Le système est assimilé à un gaz parfait, on écrit donc

$$K = \frac{3}{2}Nk\theta$$

et pour l'énergie potentielle

$$W = -\frac{GM^2}{R} = -\frac{GMN\mu}{R}.$$

Le théorème du viriel donne alors

$$3k\theta = \frac{GM\mu}{R} \Rightarrow R = \frac{GM\mu}{3k\theta} \quad (1)$$

Le fait que l'on soit à l'équilibre fixe donc pour une masse et une température donnée, la taille du système. Cette taille caractéristique s'exprime généralement en fonction d'autres paramètres comme la vitesse du son dans le gaz (fluide) constituant le système et sa densité.

La vitesse du son c_s dans un fluide de pression P et de densité volumique de masse ρ est définie par la relation

$$\overline{\nabla P} = c_s^2 \overline{\nabla \rho}$$

dans le cas de notre fluide parfait de volume $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$ l'équation d'état s'écrit

$$P = \frac{Nk\theta}{\mathcal{V}} = \frac{Mk\theta}{\mu\mathcal{V}} = \frac{k\theta}{\mu}\rho$$

pour ce système isotherme et uniforme on a donc

$$c_s^2 = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_S = \frac{k\theta}{\mu}$$

soit

$$k\theta = \mu c_s^2$$

ainsi en écrivant que

$$M = \rho\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi\rho R^3$$

le rayon caractéristique du viriel s'écrit

$$R = \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \frac{c_s}{\sqrt{G\rho}}$$

le facteur $3/2\sqrt{\pi}$ ne doit pas être pris au pied de la lettre, un système non sphérique, où une autre évaluation de l'énergie potentielle pourrait faire apparaître une autre constante. On retiendra l'expression de la longueur de Jeans

$$\ell_j = \frac{c_s}{\sqrt{G\rho}}$$

qui est donc une bonne approximation de la taille caractéristique d'un système autogravitant à l'équilibre. Que se passe-t-il si la taille de ce système est modifiée en gardant ses autres caractéristiques constantes.

Il faut entreprendre un analyse de stabilité dynamique!

¹Pour tous les détails sur l'obtention de ce théorème on pourra consulter le fil rouge 2004 disponible sur www.ensta.fr/~perez.

1.2 Par la mécanique des fluides.

Le système fluide que nous étudions est décrit par deux équations fondamentales

$$\begin{cases} \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\nabla} P - \rho \vec{\nabla} \phi & \text{(Euler)} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho = -\rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} & \text{(Continuité)} \end{cases}$$

Le fluide est décrit par un champ (vectoriel) de vitesse $\vec{v}(\vec{r}, t)$ et 3 champs scalaires de pression $P(\vec{r}, t)$, de densité volumique de masse $\rho(\vec{r}, t)$ et de potentiel gravitationnel $\phi(\vec{r}, t)$. L'équation de continuité affirme la conservation de la masse et la continuité des divers champs, l'équation d'Euler affirme la conservation de la quantité de mouvement totale dans le fluide, on peut aussi la voir comme l'écriture subtile du principe fondamental de la dynamique.

Si l'on fait apparaître une vitesse du son dans le fluide les champs de pression et de densité sont alors reliés par l'équation

$$\vec{\nabla} P = c_s^2 \vec{\nabla} \rho$$

On supposera que $c_s = \text{cste}$ partout dans le fluide : ce dernier est donc décrit par une équation d'état.

Nous allons étudier la stabilité d'un équilibre décrit par des champs de vitesse constants et stationnaires $\vec{v}_{eq} = \vec{v}_o$, $P_{eq} = P_o$, $\rho_{eq} = \rho_o$ et $\phi_{eq} = \phi_o$. Pour cela, on développe les divers champs du fluide au voisinage de l'équilibre

$$\begin{cases} \vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_o + \varepsilon \vec{v}_1(\vec{r}, t) \\ \rho(\vec{r}, t) = \rho_o + \varepsilon \rho_1(\vec{r}, t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} P(\vec{r}, t) = P_o + \varepsilon P_1(\vec{r}, t) \\ \phi(\vec{r}, t) = \phi_o + \varepsilon \phi_1(\vec{r}, t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad |\varepsilon| \ll 1$$

On injecte ces relations dans les deux équations fondamentales et l'on ne conserve que les termes d'ordre ε , en négligeant les suivants, il vient

$$\begin{cases} \rho_o \left[\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_o \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_1 \right] = -c_s^2 \vec{\nabla} \rho_1 - \rho_o \vec{\nabla} \phi_1 \\ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \vec{v}_o \cdot \vec{\nabla} \rho_1 = -\rho_o \vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 \end{cases}$$

Nous n'avons toujours pas précisé le référentiel galiléen d'usage, on le choisit donc tel que $\vec{v}_o = \vec{0}$, il ne reste donc plus que

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\frac{c_s^2}{\rho_o} \vec{\nabla} \rho_1 - \vec{\nabla} \phi_1 \\ \frac{1}{\rho_o} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1 \end{cases}$$

On dérive alors la seconde équation par rapport au temps et l'on prend la divergence de la première : le terme $\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_1)$ est alors présent dans les deux équation, on peut l'éliminer. Il vient

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = c_s^2 \Delta \rho_1 + \rho_o \Delta \phi_1 \quad (2)$$

L'équation de Poisson pour le potentiel gravitationnel s'écrit

$$\Delta \phi = 4\pi G \rho$$

au voisinage de l'équilibre uniforme et stationnaire on a donc

$$\Delta\phi_1 = 4\pi G\rho_1$$

l'équation (2) devient donc

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = c_s^2 \Delta \rho_1 + 4\pi G \rho_o \rho_1$$

Il ne reste plus qu'à décomposer ρ_1 sur une base de modes normaux

$$\rho_1(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} A_{\alpha} \exp \left[i \left(\vec{k}_{\alpha} \cdot \vec{r} + \omega_{\alpha} t \right) \right]$$

et l'on obtient une relation de dispersion pour chaque mode α

$$\omega_{\alpha}^2 = c_s^2 (k_{\alpha}^2 - k_j^2) \quad \text{avec } k_j^2 := \frac{4\pi G \rho_o}{c_s^2}$$

On remarque immédiatement que :

- si $k_{\alpha} > k_j$ alors $\omega_{\alpha}^2 > 0$, la pulsation du mode α est réelle il s'agit donc d'un mode oscillant.
- si $k_{\alpha} < k_j$ alors $\omega_{\alpha}^2 < 0$, la pulsation du mode α est imaginaire pure : $\omega_{\alpha} = \pm i\Omega_{\alpha}$ avec $\Omega_{\alpha} \in \mathbb{R}$.

Le mode α est donc instable (il possède une partie exponentiellement croissante).

Si l'on introduit la longueur d'onde λ_{α} associée au nombre d'onde k_{α} par la relation

$$k_{\alpha} = \frac{2\pi}{\lambda_{\alpha}}$$

la condition de stabilité du mode α s'écrit

$$\frac{2\pi}{\lambda_{\alpha}} > k_j \quad \Rightarrow \quad \lambda_{\alpha} < \lambda_j \quad \text{avec } \lambda_j := \frac{2\pi}{k_j} = \sqrt{\pi} \frac{c_s}{\sqrt{G\rho_o}}$$

Si un mode est associé à une longueur d'onde plus grande que la longueur d'onde de Jeans λ_j du système, il le déstabilisera.

1.3 Par la théorie cinétique.

Dans cette section, nous allons décrire notre système auto-gravitant par la théorie cinétique de champ moyen. Dans cette modélisation le système est décrit par une fonction de distribution dans l'espace des phases² $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. Cette fonction est telle que la quantité

$$d\Omega = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{r}d\mathbf{p}$$

représente la probabilité pour qu'une étoile test de masse m représentant les constituant le système ait une position dans l'intervalle $[\mathbf{r}, \mathbf{r} + d\mathbf{r}]$ et une impulsion dans l'intervalle $[\mathbf{p}, \mathbf{p} + d\mathbf{p}]$ à l'instant t .

La densité marginale

$$\rho(\mathbf{r}, t) = m \int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}$$

n'est autre que le champ de densité volumique de masse moyenne du système. L'équation de Poisson nous donne le potentiel gravitationnel $\psi(\mathbf{r}, t)$ créée par la distribution des particules

$$\Delta\psi = 4\pi G\rho = 4\pi Gm \int f d\mathbf{p}$$

²Les vecteurs sont maintenant indiqués en gras !

Le gradient de ce potentiel donne la force qui s'applique à la particule test en chaque point du système. La conservation du nombre de particules (qui est associée à la normalisation de la fonction de distribution) donne implique l'équation de Vlasov

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - m \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0$$

La dynamique de champ moyen du système est donc donnée par le système de Vlasov-Poisson

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - m \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0 \\ \Delta \psi = 4\pi G m \int f d\mathbf{p} \end{cases}$$

Pour étudier la stabilité linéaire d'un état d'équilibre homogène $f_o = f_o(\mathbf{p})$, nous écrivons la fonction de distribution et le potentiel sous la forme

$$\begin{cases} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_o(\mathbf{p}) + \varepsilon f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + o(\varepsilon) \\ \psi(\mathbf{r}, t) = \psi_o(\mathbf{r}) + \varepsilon \psi_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + o(\varepsilon) \end{cases} \quad \text{avec } |\varepsilon| \ll 1$$

En ne conservant que les termes du premier ordre, le système de Vlasov-Poisson devient

$$\begin{cases} m \frac{\partial \psi_o}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{p}} - \varepsilon \left[\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} - m \frac{\partial \psi_1}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{p}} - m \frac{\partial \psi_o}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}} \right] = 0 \\ \Delta \psi_o - 4\pi G m \int f_o d\mathbf{p} = \varepsilon [4\pi G m \int f_1 d\mathbf{p} - \Delta \psi_1] \end{cases}$$

On fait alors l'hypothèse que le couple (f_o, ψ_o) est une solution d'équilibre du système, ce qui revient à imposer que

$$m \frac{\partial \psi_o}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{p}} = \Delta \psi_o - 4\pi G m \int f_o d\mathbf{p} = 0$$

Arrive alors l'hypothèse connue sous le nom d'arnaque de Jeans (Jeans' Swindle pour les puristes...) qui consiste à supposer que

$$-m \frac{\partial \psi_o}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{p}} = o(\varepsilon)$$

Notons que cette arnaque n'en est peut-être pas une ... Dans ces conditions, du système de Vlasov-Poisson linéarisé, il ne reste plus que

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{r}} - m \frac{\partial \psi_1}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{p}} = 0 \\ \Delta \psi_1 = 4\pi G m \int f_1 d\mathbf{p} \end{cases}$$

On écrit alors la décomposition

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_a(\mathbf{p}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad \text{et} \quad \psi_1(\mathbf{r}, t) = \psi_a(\mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

qui revient à faire une transformation de Fourier sans le dire... On obtient alors

$$\begin{cases} -\omega f_a(\mathbf{p}) + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \mathbf{k} f_a(\mathbf{p}) - m \psi_a(\mathbf{r}) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{p}} = 0 \\ -k^2 \psi_a(\mathbf{r}) = 4\pi G m \int f_a(\mathbf{p}) d\mathbf{p} \end{cases}$$

la première équation permet d'avoir

$$f_a(\mathbf{p}) = \frac{m \psi_a(\mathbf{r}) \mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{p}}}{\left[\frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \mathbf{k} - \omega \right]}$$

que l'on injecte dans la deuxième pour avoir

$$-k^2 = 4\pi Gm^2 \int \frac{\mathbf{k} \cdot \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{p}}}{\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{m} - \omega} d\mathbf{p} \quad (3)$$

qui constitue une relation de dispersion générale. Si l'équilibre est supposé isotherme³

$$f_o(\mathbf{p}) = \frac{\nu_o}{(2\pi m^2 \sigma^2)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2m^2 \sigma^2}\right) \cdot 1_{|r| < R}$$

la relation (3) s'écrit

$$-k^2 = 1_{|r| < R} \frac{4\pi Gm^2 \nu_o}{(2\pi m^2 \sigma^2)^{3/2}} \int \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{\left[\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{m} - \omega\right]} \frac{\exp\left(-\frac{p^2}{2m^2 \sigma^2}\right)}{d\mathbf{p}}$$

En choisissant l'axe Ox tel que $\mathbf{k} = k\hat{e}_x$ avec $k \in \mathbb{R}^+$, l'intégration dans l'espace des vitesses en coordonnées cartésiennes se poursuit

$$k^2 = \frac{4\pi Gm^2 \nu_o}{(2\pi m^2 \sigma^2)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{kp_x}{\left[\frac{kp_x}{m} - \omega\right]} \frac{\exp\left(-\frac{p_x^2}{2m^2 \sigma^2}\right)}{dp_x} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2m^2 \sigma^2}\right) dt \right]^2 \quad \text{pour } r < R$$

attendu que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2m^2 \sigma^2}\right) dt = \sqrt{2\pi m^2 \sigma^2}$$

en posant $u = \frac{p_x}{m\sigma}$ et $\omega_o^2 = 4\pi Gm\nu_o$ on obtient finalement la relation de dispersion

$$1 = \left(\frac{\omega_o}{k\sigma}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ue^{-\frac{u^2}{2}}}{u - \frac{\omega}{k\sigma}} du \quad \text{pour } r < R$$

Lorsque $\omega = 0$, cette relation dégénère en

$$k^2 = k_o^2 := \left(\frac{\omega_o}{\sigma}\right)^2 = \frac{4\pi Gm\nu_o}{\sigma^2} \quad (4)$$

dans le cas général nous avons donc

$$1 - \left(\frac{k_o}{k}\right)^2 F(z) = 0 \quad \text{avec } z = \frac{\omega}{k\sigma} \text{ et } F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ue^{-\frac{u^2}{2}}}{u - z} du$$

Les paramètres k et σ sont des nombres réels positifs, il en va différemment de ω qui peut, quant à lui, être un nombre complexe. En écrivant $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on obtient alors

$$f_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f_a(\mathbf{p}) e^{ik(1-\sigma xt)} e^{k\sigma yt} \quad \text{et} \quad \psi_1(\mathbf{r}, t) = \psi_a(\mathbf{r}) e^{ik(1-\sigma xt)} e^{k\sigma yt} .$$

La stabilité des solutions (modes stables) dépend donc uniquement du signe de $y = \text{Im}(z)$:

- si $y = \text{Im}(z) = \frac{1}{k\sigma} \text{Im}(\omega) < 0$, le mode est amorti selon y , il est donc stable;
- si $y = \text{Im}(z) = \frac{1}{k\sigma} \text{Im}(\omega) = 0$, le mode est oscillant, donc toujours stable;

³La limitation du rayon provient de l'analyse présentée en section ??.

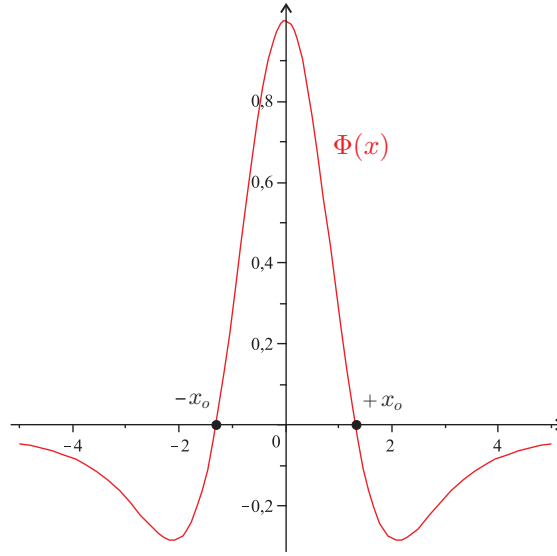


FIG. 1 – Représentation graphique de la fonction $\Phi(x)$.

- si $y = \text{Im}(z) = \frac{1}{k\sigma} \text{Im}(\omega) > 0$, l'amplitude des oscillations est croissante, le mode est instable. L'existence des modes est donnée par l'étude des solutions de l'équation de dispersion. En décomposant les parties réelle et imaginaires de celle-ci on obtient

$$\left[1 - \left(\frac{k_o}{k} \right)^2 \text{Re}(F(z)) \right] + i \left[\left(\frac{k_o}{k} \right)^2 \text{Im}(F(z)) \right] = 0$$

L'existence d'un mode (stable ou instable) est donc subordonnée à l'existence de solutions $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ pour le système

$$\begin{cases} \text{Im}(F(z)) = 0 \Rightarrow \frac{y}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ue^{-\frac{u^2}{2}}}{(u-x)^2+y^2} du = 0 \\ 1 - \left(\frac{k_o}{k} \right)^2 \text{Re}(F(z)) = 0 \Rightarrow \left(\frac{k}{k_o} \right)^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(u-x)e^{-\frac{u^2}{2}}}{(u-x)^2+y^2} du \end{cases}$$

Deux cas sont à étudier :

- Supposons que $\omega \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $y = \frac{1}{k\sigma} \text{Im}(\omega) = 0$.

On remarque immédiatement que dans ce cas on a toujours $\text{Im}(F(z)) = 0$. La deuxième équation du système devient alors

$$\left(\frac{k}{k_o} \right)^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u}{u-x} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \Phi(x)$$

On peut tracer la fonction $\Phi(x)$, voir figure 1, pour constater que sur l'intervalle $[-x_o, x_o]$ avec $x_o \simeq 1,307$, la fonction $\Phi(x) \in [0, 1]$. Il existe donc sur cet intervalle une valeur de k réelle et positive et donc un mode. Dans ce régime nous avons $y = 0$, ce mode est donc toujours stable et tel que

$$\left(\frac{k}{k_o} \right)^2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad k \leq k_o$$

- Supposons que $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, c'est-à-dire $y = \frac{1}{k\sigma} \text{Im}(\omega) \neq 0$.

Une petite étude de la fonction

$$\text{Im}(F(z)) = \varphi_y(x) := \frac{y}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{ue^{-\frac{u^2}{2}}}{(u-x)^2+y^2} du \quad \text{avec } y \neq 0$$

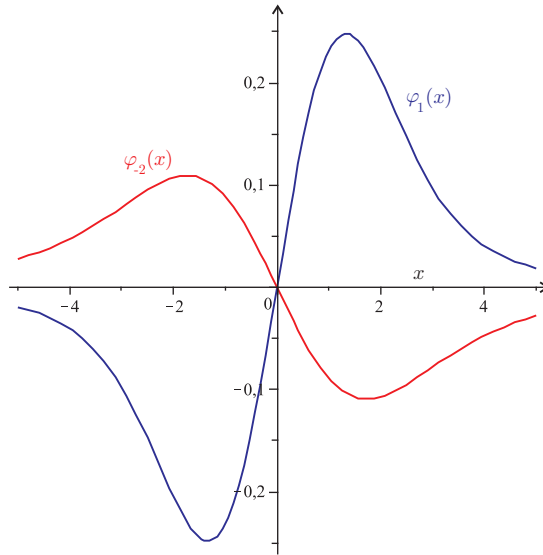


FIG. 2 – Représentation graphique de la fonction $\varphi_y(x)$ pour $y = 1$ (en bleu) et $y = -2$ (en rouge)

montre qu'elle ne s'annule qu'une fois en $x = 0$. On peut le vérifier pour quelques valeurs de y sur la figure .

Pour que le système ait des solutions il est donc nécessaire d'imposer $x = 0$. La pulsation ω est donc imaginaire pure. En reportant cette condition dans l'équation vérifiée par $\text{Re}(F(z))$, on obtient

$$\left(\frac{k}{k_o}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u^2 e^{-\frac{u^2}{2}}}{u^2 + y^2} du$$

Pour chaque valeur de y , l'intégrale du second membre est positive, ce qui permet d'obtenir une solution k réelle et positive et donc un mode.

Ce mode est stable si $y < 0$ et instable si $y > 0$.

En résumé, nous pouvons donc conclure :

- Si $\text{Im}(\omega) = 0$, les solutions linéaires sont oscillantes et donc **stables**. On a de plus

$$\begin{cases} k = k_o & \text{si } \omega = 0 \\ 0 \leq k < k_o & \text{si } \omega \neq 0 \end{cases}$$

- Si $\text{Im}(\omega) < 0$, les solutions linéaires sont des oscillations dont l'amplitude est décroissante. Cette situation correspond à $k < k_o$, elle est **stable**.
- Si $\text{Im}(\omega) > 0$, les solutions linéaires sont des oscillations dont l'amplitude est croissante. Cette situation correspond à $k > k_o$, elle est **instable**.

On retrouve donc les résultats de l'instabilité de Jeans fluide : un système autogravitant plus grand que sa longueur de Jeans est instable. Plusieurs expressions ont été obtenues pour cette longueur fondamentale, elles sont toutes équivalentes :

1. Description cinétique :

$$L_j = \frac{2\pi}{k_o} = \sqrt{\pi} \frac{\sigma}{\sqrt{G\rho_o}}$$

où σ est la dispersion de vitesse et ρ_o la densité volumique de masse moyenne, supposée uniforme, du système ;

2. Description fluide :

$$\lambda_j := \frac{2\pi}{k_j} = \sqrt{\pi} \frac{c_s}{\sqrt{G\rho_o}}$$

où c_s est la vitesse du son dans le fluide et ρ_o la densité volumique de masse moyenne, supposée uniforme, du système ;

3. Description virielle :

$$\ell_j = \frac{c_s}{\sqrt{G\rho}}$$

correspond au rayon de la boule homogène constituée d'un gaz parfait autogravitant à l'équilibre.

2 L'instabilité d'orbites radiales

Dès 1971, utilisant les méthodes de water-bag⁴ l'équipe française de Feix, obtenait la stabilité des systèmes sphériques isotropes décroissants contre tout type de perturbation. Cinq ans plus tard, dans un article d'une incroyable technicité ils récidivaient en affirmant, toujours en utilisant le water-bag, que ce résultat se généralise aux systèmes anisotropes. Ce résultat était en contradiction avec ceux de l'école russe qui sous l'impulsion d'Antonov depuis le début des années 1970, avait « démontré⁵ » qu'un système anisotrope principalement constitué d'étoiles en orbite radiales doit être instable. Avec le développement des premières véritables simulations numériques dans le milieu des années 1980, l'affaire fut tranchée : Merritt et Aguilar , puis Barnes montrèrent que ce type de système sphérique fortement anisotrope dans l'espace des vitesses se déformait en quelques temps dynamiques pour former une barre, le rendant plus ou moins elliptique suivant la proportion d'énergie cinétique radiale contenue dans le système. L'idée d'utiliser ce mécanisme pour produire des galaxies elliptiques primordiales était lancée ! On pourra trouver dans l'article de revue [1], tous les détails de cette histoire. Les premières preuves de cette instabilité sont très techniques et basées sur une décomposition de la fonction de distribution sur une base de fonction de l'espace des phases. C'est justement ce genre de décomposition qui rendait la preuve du water-bag de 1976 inopérante (voir [4]) : pour un système sphérique composé de particules en orbites purement radiales la fonction de distribution est très singulière et s'écrit

$$f_o(E, L^2) = \varphi(E) \delta(L^2)$$

Si φ est une fonction positive quelconque, la distribution de Dirac en $L^2 = 0$ assure le caractère radial des orbites sélectionnées. Pour décrire une éventuelle instabilité d'orbites radiales il faut donc choisir une base qui engendre des fonctions aussi singulières, ce qui n'est pas le cas de l'hypothèse water-bag ... La seule preuve énergétique de cette instabilité est l'œuvre récente de [2]. Ce résultat est basé sur une théorie physiquement très ancienne, puisque dès la fin du XIX^{ème} siècle Lord Thomson montrait que certains systèmes pouvaient être déstabilisés lorsqu'on leur permettait de dissiper une partie de leur énergie. Ces travaux ont trouvé leur confirmation théorique dans toute une série d'articles publiés de 1994 à 2009 par l'équipe de Marsden sur le thème des instabilités induites par la dissipation. L'idée de ces résultats est la suivante : un système hamiltonien à l'équilibre possédant des modes d'énergie négative⁶ peut être stable ou instable. Si par contre, on introduit dans ce système des facteurs de dissipation, le système n'est alors plus hamiltonien et les modes d'énergie négative deviennent instables. L'idée développée dans [2] est entièrement basée sur ce résultat. En prenant une fonction de distribution de la forme

$$f_o(E, L^2) = \varphi(E) d_a(L^2)$$

⁴Ces méthodes reviennent à approximer la fonction de distribution par une fonction constante par morceau. On injecte ensuite cette approximation dans le système de Vlasov-Poisson et on étudie le spectre des perturbations.

⁵Tout comme celle des français d'Orléans, les preuves russes sont assez incompréhensibles de part leur technicité ou leur contexte.

⁶Ce qui signifie en français des perturbations engendrant des variations d'énergie négative.

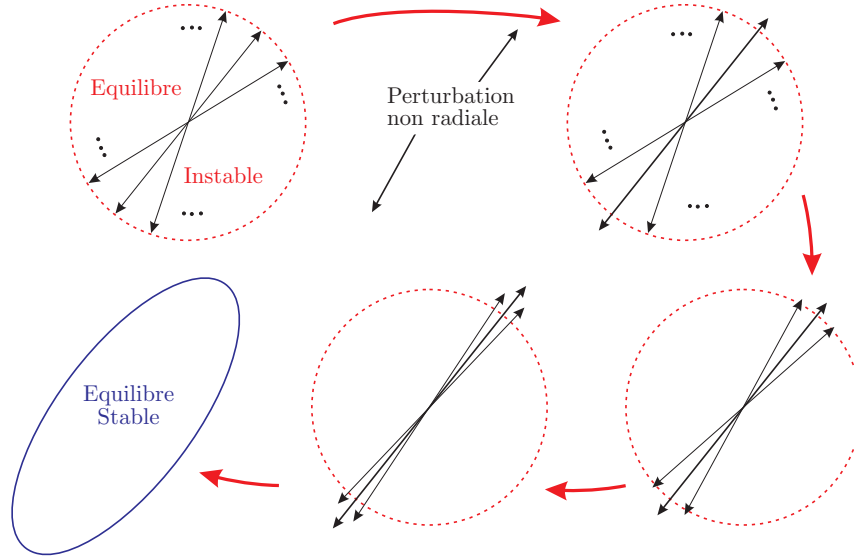


FIG. 3 – mécanisme de l’instabilité d’orbites radiales

avec $d_a(L^2) \rightarrow \delta(L^2)$ lorsque $a \rightarrow 0$. Dans cette limite, la variation d’énergie engendrée par le générateur g s’écrit à sous la forme

$$\begin{aligned} H_a^{(2)} &= o(a) - \frac{Gm^2}{2} \int \int \frac{\{g, f_o\} \{g', f'_o\}}{|\mathbf{q} - \mathbf{q}'|} d\Gamma' d\Gamma \\ &= o(a) - \frac{1}{8\pi G} \int |\text{grad}(\psi_1)|^2 d\mathbf{r} < 0 \end{aligned}$$

pour une large classe de perturbations. En conclusion, les systèmes sphériques anisotropes possèdent des modes d’énergie négatives lorsque leur espace des phases devient surpeuplé du coté des orbites radiales. Nous avons vu en introduction de cette partie que le système de Vlasov-Poisson est hamiltonien. Les résultats de Marsden impliquent donc l’instabilité si le système peut dissiper son énergie.

Il est clair que théoriquement le système de Vlasov-Poisson est strictement non-dissipatif, cependant dans la réalité de la dynamique stellaire, ou dans sa simulation numérique, la présence d’un minimum de dissipation est inéluctable (gaz, collisions, rayonnement gravitationnel (...) ou même le schéma numérique dans le cas des simulations). Si la plupart des systèmes sphériques sont insensibles à ces fluctuations, cela n’est pas le cas des systèmes principalement constitués d’orbites radiales, pour lesquels il existe de nombreux modes d’énergie négative. Le mécanisme physique de cette instabilité est relativement simple : considérons un système de deux particules test en orbite purement radiale dans un système donné. L’analyse de ce type d’orbite montre que ces orbites ne tournent pas ($\Phi/\tau = 0$), d’un point de vue énergétique il est clair que ces deux particules minimiseraient leur énergie en se rapprochant. Sans dissipation, ce gain d’énergie reste utopique car les particules ne peuvent pas se déplacer ailleurs que sur leur segment fixe. L’introduction d’un minimum de dissipation permet la migration ... Il est clair que sans l’intervention d’un phénomène d’avalanche (les unes entraînant les autres) ce mécanisme serait bien trop long pour déformer le système en une barre dont la direction correspond à l’alignement de ces orbites. C’est donc bien cette capacité dissipative couplée à cette configuration d’énergie négative qui est à l’origine de ce processus ! Avec un système composé uniquement d’orbites radiale le mécanisme de cette instabilité est représenté sur la figure 3.

L’instabilité d’orbite radiale est un phénomène fondamental dans la formation des structures de l’Univers. Lors du processus d’effondrement en cascade que l’on pense présent dans ce cadre, on conçoit assez facilement qu’un gros objet s’effondrant sur un petit va lui communiquer beaucoup d’énergie cinétique radiale et donc peut-être déclencher l’instabilité qui va conduire à sa déformation. C’est le mécanisme qu’imaginait Merritt dans les années 80 pour former des galaxies elliptiques

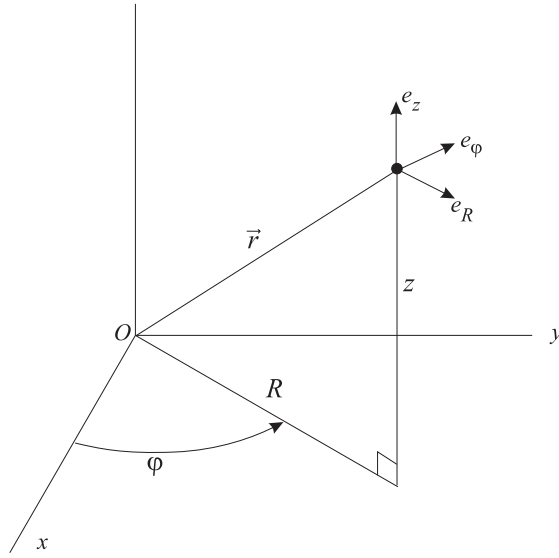


FIG. 4 – Le système de coordonnées cylindriques

primordiales. L'ardeur fut calmée par les premières véritables simulations cosmologiques qui montrèrent que les traces de cette élongation pouvaient être gommées par le long processus de coalescence qui est à l'œuvre dans les scénarios hiérarchiques de formation des structures. Il n'en demeure pas moins que c'est la ségrégation introduite initialement dans l'espace des phases par cette instabilité qui reste présente et conduit à la formation du profil de densité si particulier que l'on observe pour ces structures. C'est en tous cas le résultat de l'analyse de Mac Millan et al. [3].

3 Stabilité et spirales

Les galaxies spirales sont des structures très aplaties et présentant une certaine symétrie de révolution.

Pour leur étude, nous nous plaçons donc dans un référentiel cylindrique.

Nous allons considérer que le potentiel gravitationnel d'une galaxie spirale possède la symétrie cylindrique et déterminer les propriétés des orbites des étoiles dans un tel potentiel. Ce dernier est donc par hypothèse de la forme

$$\psi = \psi(R, z) \quad \text{tel que} \quad \psi(R, z) = \psi(R, -z) \quad (5)$$

On se place dans un référentiel centré sur la galaxie. Une particule de masse m évoluant dans le potentiel galactique est repérée par le vecteur $\vec{r} = R\vec{e}_R + z\vec{e}_z$. Sans aucune autre force que celle créée par le champ gravitationnel de la galaxie, le système est conservatif, le lagrangien de cette particule s'écrit

$$\mathcal{L} = K - U = \frac{1}{2}m \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 - m\psi$$

un simple calcul donne

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{R}\vec{e}_R + R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$$

et nous obtenons pour le lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m \left(\dot{R}^2 + R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 \right) - m\psi(R, z)$$

Les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

s'écrivent pour chacune des 3 variables $q = R, \varphi$ et z , il vient

$$\begin{cases} m\ddot{R} - mR\dot{\varphi}^2 + m\frac{\partial\psi}{\partial R} = 0 \\ \frac{d}{dt}(mR^2\dot{\varphi}) = 0 \\ m\ddot{z} + m\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

Ce sont les équations du mouvement de la particule de masse m dans le champ galactique.

Le moment cinétique de la particule à pour expression

$$\vec{L} = m\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt} = m \left[-R\dot{\varphi}\vec{e}_R + \frac{d(Rz)}{dt}\vec{e}_\varphi + R^2\dot{\varphi}\vec{e}_z \right]$$

Comme on peut le voir sur la seconde équation du mouvement, la composante

$$L_z = \vec{L} \cdot \vec{e}_z = mR^2\dot{\varphi} := mJ_z$$

est une constante du mouvement. Il s'agit d'une propriété bien connue du mouvement dans un potentiel symétrique.

En utilisant la constante J_z , les deux autres équations du mouvement s'écrivent

$$\begin{cases} \ddot{R} = \frac{J_z^2}{R^3} - \frac{\partial\psi}{\partial R} \\ \ddot{z} = -\frac{\partial\psi}{\partial z} \end{cases}$$

Pour rendre ce système élégant, on introduit souvent le potentiel effectif

$$\psi_e(R, z) := \psi(R, z) + \frac{J_z^2}{2R^2}$$

et l'on obtient

$$\begin{cases} \ddot{R} = -\frac{\partial\psi_e}{\partial R} \\ \ddot{z} = -\frac{\partial\psi_e}{\partial z} \end{cases} \quad (6)$$

Les solutions d'équilibre de ce système sont assez simples à mettre en évidence :

1. $\ddot{z} \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial\psi_e}{\partial z} = \frac{\partial\psi}{\partial z} \equiv 0$. Nous avons fait l'hypothèse que la fonction $\psi(R, z)$ est paire en z , sa dérivée partielle par rapport à z est donc impaire. Pour garantir l'équilibre il suffit donc de se placer dans le plan $z = 0$.
2. $\ddot{R} \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial\psi_e}{\partial R} = \frac{J_z^2}{R^3} - \frac{\partial\psi}{\partial R} \equiv 0$. Ceci correspond à un mouvement circulaire uniforme dans le plan $z = 0$. En effet, pour un tel mouvement $R(t) = R_o$ et $\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_o$ sont deux constantes,

le vecteur position est toujours ortho-radial centrifuge $\vec{r} = R_o \vec{e}_R$, la vitesse est purement tangentielle et constante $\vec{v} = R_o \dot{\varphi}_o \vec{e}_\varphi$ et l'accélération ortho-radiale centripète $\vec{a} = -R_o \dot{\varphi}_o^2 \vec{e}_R$. La composante selon \vec{e}_R du principe fondamental de la dynamique s'écrit donc

$$-R_o \dot{\varphi}_o^2 = -\frac{\partial \psi}{\partial R}$$

ce qui conduit bien à $\ddot{R} \equiv 0$.

La trajectoire d'équilibre d'une particule test dans un potentiel ayant la symétrie cylindrique est donc la trajectoire circulaire $R = R^*$ dans le plan $z = 0$. Afin de savoir si les équilibres que nous venons de mettre en évidence correspondent à des zones de stabilité dans lesquelles les étoiles seront susceptibles de se trouver, nous allons linéariser le système au voisinage des ces solutions d'équilibre et étudier sa stabilité.

On procède dans un premier temps à un développement de Taylor du potentiel au voisinage d'une orbite circulaire, en posant $\rho(t) = R(t) - R^*$ et $\psi_e^* = \psi_e(R^*, 0) = cste$, il vient

$$\begin{aligned} \psi_e(R, z) = & \psi_e^* + \rho \left. \frac{\partial \psi_{eff}}{\partial R} \right|_{R^*, 0} + z \left. \frac{\partial \psi_{eff}}{\partial z} \right|_{R^*, 0} \\ & + \frac{1}{2} \left[\rho z \left. \frac{\partial^2 \psi_{eff}}{\partial R \partial z} \right|_{R^*, 0} + \rho^2 \left. \frac{\partial^2 \psi_{eff}}{\partial R^2} \right|_{R^*, 0} + z^2 \left. \frac{\partial^2 \psi_{eff}}{\partial z^2} \right|_{R^*, 0} \right] \\ & + O(z\rho^2) \end{aligned}$$

les deux termes de dérivée première sont nul par définition de l'équilibre, le terme de dérivée croisée est nul par symétrie de ψ_{eff} autour du plan $z = 0$, enfin on introduit les deux constantes

$$\kappa = \left. \frac{\partial^2 \psi_e}{\partial R^2} \right|_{R^*, 0} \quad \text{et} \quad \omega = \left. \frac{\partial^2 \psi_e}{\partial z^2} \right|_{R^*, 0}$$

respectivement appelées fréquences d'épicycle et verticale. Le paramètre κ jouit d'une propriété remarquable dans le cas des galaxies spirales : le potentiel effectif $\psi_e(R, z)$ est la somme d'une fonction concave $\psi(R, z)$ et d'une fonction convexe $\frac{J_z^2}{2R^2}$, deux dérivées par rapport à R dans le plan $z = 0$, produisent $\kappa \simeq 2$ sur une large plage de valeurs de R^* . De même, dans le voisinage du plan $z = 0$, le paramètre ω est positif et constant. Pour une galaxie spirale typique, nous avons donc

$$\psi_e(R, z) = \psi_e^* + \frac{1}{2} \kappa (R - R^*)^2 + \frac{1}{2} \omega z^2 + o(2) \quad \text{avec } \kappa \simeq 2 \quad \text{et } \omega > 0$$

au voisinage de l'équilibre les équations du mouvement (6) s'écrivent donc

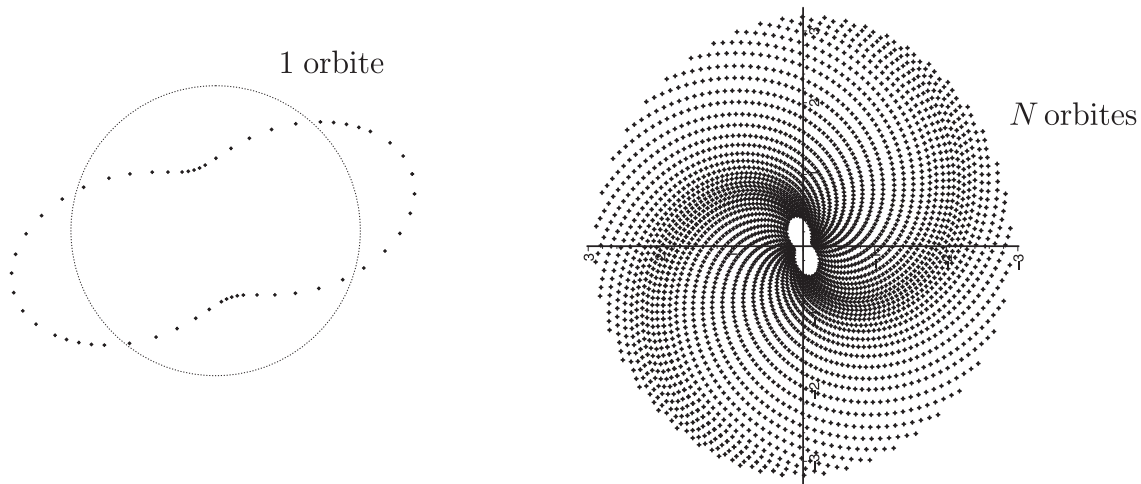
$$\begin{cases} \ddot{R} = -\kappa (R - R^*) \\ \ddot{z} = -\omega z \end{cases}$$

Les solutions sont donc périodiques

$$\begin{cases} \rho = \Upsilon \cos(\kappa t + \alpha) \\ z = Z \cos(\omega t + \beta) \end{cases} \quad (7)$$

les constantes Υ et Z sont arbitraires mais petites, pour rester cohérent avec le développement de Taylor, les constantes α et β sont quant à elles complètement libres.

Les orbites quasi-circulaires sont donc stables, le fait que $\kappa \simeq 2$ est primordial et confère à l'orbite une forme ellipsoïdale. Si l'on prend en compte le désaxage introduit par la rotation différentielle présente dans une galaxie de ce type on obtient la spirale ...



Formation d'une spirale par association d'orbites.

Références

- [1] L. Maréchal & J. Perez, *Radial Orbit Instability : Review and perspectives*, arXiv :0910.5177, to be published in *Transport Theory and Statistical Physics*
- [2] L. Marechal & J. Perez, *Radial Orbit Instability as dissipation induced phenomenon*, ARXIV, to be published in **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**.
- [3] J. MacMillan, L.M. Widrow, R. N. Henriksen, 2006, *On universal halos and the radial orbit instability*, **The Astrophysical Journal**, vol. 653, 43
- [4] J. Perez , J.-J. Aly, *Stability of spherical self-gravitating systems I : Analytical results*, **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, vol. 280, p. 689, 1996