Clément Sire

Laboratoire de Physique Théorique

CNRS & Université Paul Sabatier, Toulouse

www.lpt.ups-tlse.fr

Introduction

- La notion de **hasard** (*al-zahr : dés, chance*) exprime une incapacité à **prévoir avec certitude** ce qu'il va advenir : l'issue d'un « événement » ou d'une « expérience » (exemple : un tirage de dés)

- Dans son sens commun, le hasard couvre :
  - L'opposition avec le **déterminisme**
  - Une absence apparente de **causalité**
  - L'**ignorance** ou la méconnaissance des paramètres et mécanismes sous-jacents

- ***Le « vrai hasard » existe-t-il ?***

Ce qu'en pensent de grands hommes

- « Ce que nous appelons hasard n'est et ne peut être que la cause ignorée d'un effet connu », Voltaire (et d'autres…)
- « Il n'y a pas de hasard dans l'art non plus qu'en mécanique », Charles Baudelaire
- « Le hasard, c'est le déguisement que prend Dieu pour voyager incognito », Albert Einstein (et d'autres…)
- « Le hasard, c'est le purgatoire de la causalité », Jean Baudrillard
- « Le hasard est le maître de l'humour », Max Ernst

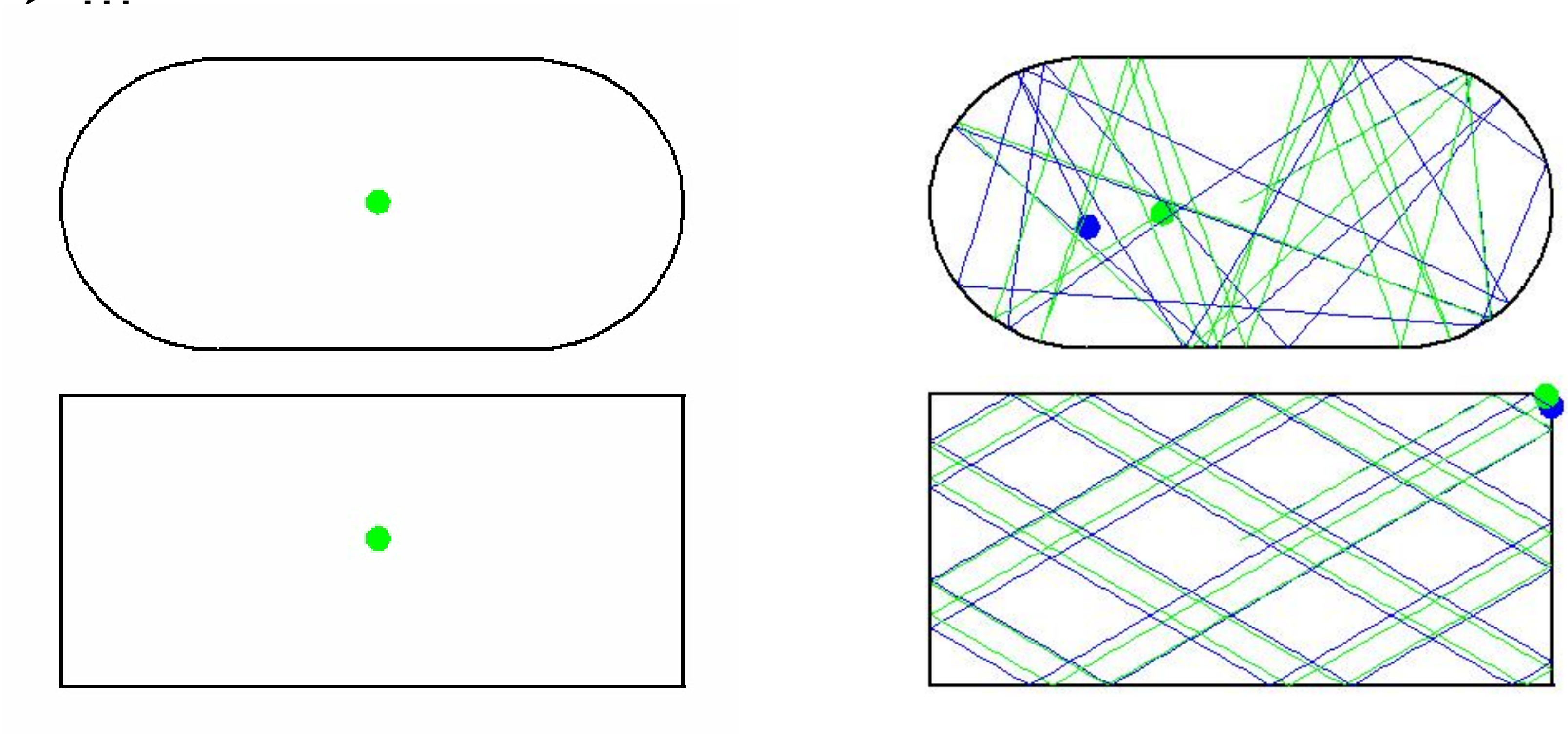
Le chaos

- Les équations de la mécanique « classique » de Newton sont **déterministes** :
  la connaissance *parfaite* des **conditions initiales** d'un système implique la connaissance *parfaite* de son **évolution future**

- Un système **chaotique** est un système extrêmement **sensible à ses conditions initiales** :
  une différence (ou méconnaissance) infime de celles-ci conduit rapidement à des **évolutions très différentes**

Le chaos

- **Exemples de systèmes chaotiques :**
  - Un lancer de dés
  - Le mouvement des molécules d'un gaz
  - La météo
  - Un billard non « intégrable » (pas un cercle ou un polygone)
  - …



Le hasard dans la vie quotidienne

- En pratique, nous sommes entourés (et sommes constitués !) d'assez de systèmes chaotiques pour que la vie nous semble constituée d'une **succession de hasards**

- Les lois de la physique quantique (nécessaire pour décrire l'échelle atomique) sont **déterministes mais intrinsèquement probabiliste** : elles prédisent (avec certitude) la probabilité de tel ou tel événement

  Le monde est intrinsèquement aléatoire !

Le monde est-il imprédictible ???

- L'approche de la **physique statistique** (Boltzmann, Gibbs, Maxwell…) a justifié que, dans certaines conditions, **un grand système chaotique se comporte de façon non chaotique… et donc prédictible**… Et cela, grâce au chaos !!!

- **Exemples :**
  - La physique des gaz et liquides macroscopiquement « non turbulents »
  - Électrons dans les matériaux
  - …

Les probabilités

- Les différents résultats possibles d'un « événement » aléatoire (soumis au hasard) peuvent avoir une certaine **probabilité intrinsèque**

- **Exemples :**
  - Un dé (non pipé !) a une probabilité 1/6 de tomber sur chacune de ses 6 faces
  - La probabilité de gagner le gros lot au Loto (6 numéros) est de 1 chance sur 13 983 816
  - La probabilité de recevoir un jeu de 13 cartes de la même couleur est 1/158 753 389 900

Les probabilités

- **Les probabilités** des différents résultats d'une « expérience » peuvent être **mesurées**, si on peut **répéter** cette expérience :

$$p_{\text{résultat}} \approx \frac{\text{\# expériences avec le résultat}}{\text{\# expériences}} = \text{fréquence du résultat}$$

- **Exemples :**
  - La probabilité que le dé tombe sur le 1 peut être évaluée par la **fréquence** de cet événement sur N tirages :

$$p_1 \approx \frac{N_1}{N} \pm \text{erreur d'ordre } \frac{1}{\sqrt{N}}$$

  - Une personne tirée au hasard dans la population française a une probabilité 0,516 (un **pourcentage de chance** de 51,6%) d'être une femme
  - Quelle est la probabilité que le PSG batte le Barca ??? (30%, estiment les parieurs et les bookmakers ; mais invérifiable)

Maniement des probabilités

- La probabilité d'un événement composé de plusieurs événements **indépendants** (décorrélés) est le **produit** de leur probabilité

- **Exemples :**
  
  - La probabilité qu'un tirage de deux dés donne « double 4 » est

$$p_{d_1=4 \textbf{ et } d_2=4} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} = 0,0277... \approx 2,8\%$$

  - La probabilité qu'une personne soit une femme (0,516 ou 51,6%) **ET** gagne plus de 2500€ net/mois (0,20 ou 20%) **n'est pas** 0,516×0,20 ≈ 0,103 (10,3%)… mais **7.7%** (contre 12,3% pour homme+salaire>2500€) !!!

Maniement des probabilités

- La probabilité qu'un événement parmi plusieurs événements **« exclusifs »** arrive est la **somme** des probabilités de ces événements

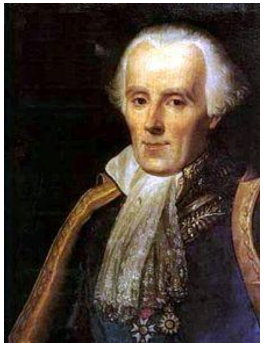
- **Exemples :**
  - La probabilité qu'un humain soit une femme **OU** un homme est 0,516**+**0,484=1 (ouf !)
  - La probabilité que la somme des faces de deux dés soit égale à 9 est

$$p_{d_1+d_2=9} = p_{d_1=6 \textbf{ et } d_2=3} + p_{d_1=5 \textbf{ et } d_2=4} + p_{d_1=4 \textbf{ et } d_2=5} + p_{d_1=3 \textbf{ et } d_2=6}$$

$$= 4 \times \left(\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{9} \approx 0,111... = 11,1\%$$

Un Peu d’Histoire

- Girolamo Cardano (1501-1576)
- Pierre de Fermat (~1605-1665)
- Blaise Pascal (1623-1662)
- Christianus Huygens (1629-1695)
- Pierre-Simon Laplace (1749-1827)
- Andreï Nikolaïevitch Kolmogorov (1903-1987)

Les anniversaires

- Dans une classe (ou un groupe quelconque) de **23** personnes, qu'elle est **la probabilité *p_{23}* qu'au moins deux individus aient le même anniversaire ?**

A votre avis : $\frac{23}{365} \approx 6\%,\ \frac{23\times 22}{2\times 365} = 69\%,\ <50\%,\ >50\%$?

- **Réponse :** calculons la probabilité **contraire** 1-p_n pour que toutes les n personnes aient un anniversaire différent :

$$1 - p_n = \frac{364}{365}\times\frac{363}{365}\times\frac{362}{365}\times\ldots\times\frac{365-(n-2)}{365}\times\frac{365-(n-1)}{365}$$

$$p_n = 1 - \frac{365!}{(n-365)!}\frac{1}{365^n}, \quad \text{avec } n! = 1\times 2\times 3\times\ldots(n-1)\times n$$

$$p_{23} = 50,7\%,\ p_{30} = 70,6\%,\ p_{40} = 89,1\%,\ p_{50} = 97.0\%,\ p_{60} = 99.4\%$$

Let's make a deal : problème de Monty Hall

- Dans un jeu télévisé, un **prix extraordinaire** est caché derrière **une porte parmi trois**
- Le candidat choisit une porte (ici, la 3), puis le **présentateur ouvre l'une des deux autres portes** (ici, la 1) qui ne contient visiblement pas le prix !

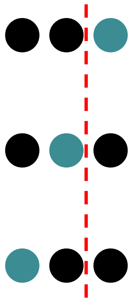
- La présentateur propose alors au joueur de **changer de porte** (ici, la 2). **Doit-il le faire ???**

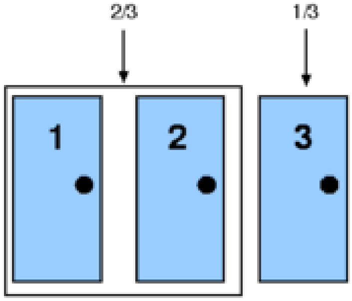
  A votre avis : oui, non, c'est pareil

Let's make a deal : problème de Monty Hall

- Initialement, le joueur avait 1 chance sur 3 de trouver la bonne porte
- **Il y a donc une probabilité 2/3 pour que le prix soit derrière [la porte 1 ou la porte 2]**

=prix





- Après ouverture de la porte 1, la porte 2 a donc une **probabilité 2/3** de cacher le prix : il faut donc **changer et choisir la porte n°2…**

à 2 (tiers) contre 1 (tiers) !!!

Let's make a deal : autres formulations

- **Trouvons les deux chèvres !**
  - Initialement, le joueur avait 2 chances sur 3 d'avoir sélectionné une porte qui cache une chèvre
  - Lorsque le présentateur ouvre la porte, la probabilité que la porte 1 et la porte 2 abritent les deux chèvres est donc 1×2/3=2/3
- **Principe du moindre choix (Borel au bridge) :**
  - Si je joueur a raison de choisir la porte 3, le présentateur a **2 choix** pour **la porte à ouvrir**, contre **1 seul choix**, si le prix est derrière la porte 2
  - Ramenons nous aux cas où une chèvre est derrière la porte 1

$$p_3 = 1/2$$

$$p_2 = 1/2$$

$$p_{3,1} = 1/2 \times 1/2 = 1/4$$

$$p_{3,2} = 1/2 \times 1/2 = 1/4$$

$$p_{2,1} = 1/2 \times 1 = 1/2 = 2 \times p_{3,1}$$

Expérience de Buffon (1733)
Mesurer π avec les probabilités !

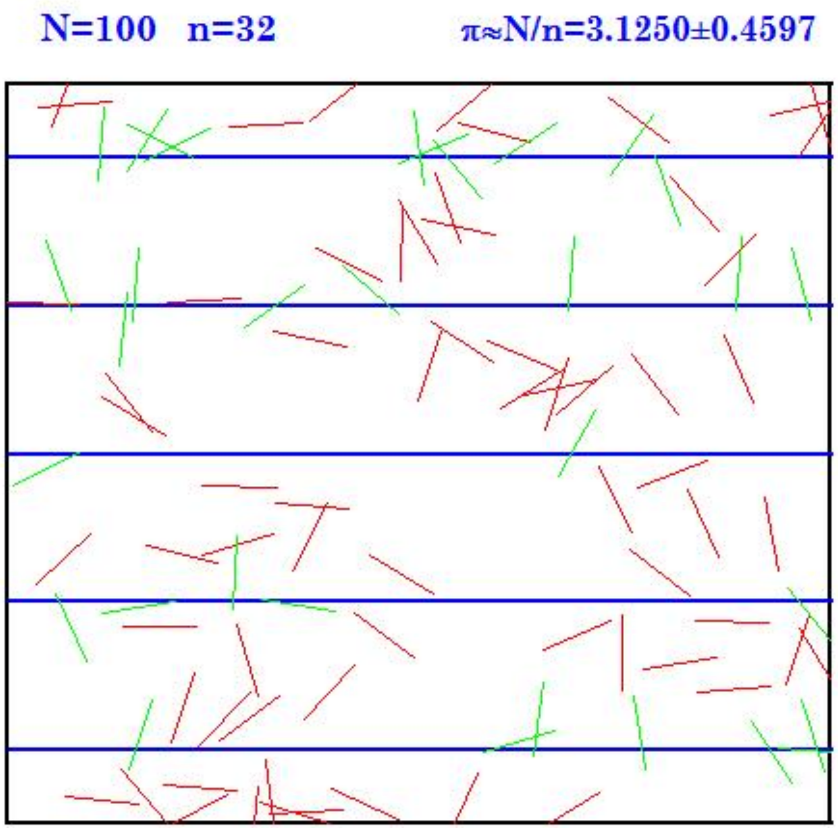
- Prendre un grand nombre d'aiguilles N et mesurer leur **longueur** a
- Lâcher ces aiguilles sur votre parquet dont les lattes ont une largeur L (>a, sinon c'est plus compliqué)
- Compter le nombre n d'aiguilles qui sont à cheval entre 2 lattes du parquet
- La **probabilité d'intersection** p d'une aiguille peut se calculer simplement (voir appendice) et vaut

$$p = \frac{2a}{\pi L} \approx \frac{n}{N} \pm \text{erreur d'ordre } \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Expérience de Buffon (1733)
Mesurer π avec les probabilités !

- **Faisons l'expérience**, avec $a = 3\,\text{cm}$ et $L = 6\,\text{cm} \Rightarrow$

$$p = \frac{2a}{\pi L} = \frac{1}{\pi} \approx \frac{n}{N}, \text{ et donc } \pi = 3.1415926\ldots \approx \frac{N}{n} \pm O\left(\frac{4,6}{\sqrt{N}}\right)$$



Le (second) mariage de Kepler (1613)
ou le cabinet de recrutement
ou la recherche d'une maison à acheter

- Vous devez choisir le **meilleur candidat** parmi n qui se présenteront successivement pour un entretien (n=11 pour les femmes de Kepler)
- Malheureusement, après chaque interview, vous devez **décider de garder ou non** le candidat
- Quelle **stratégie** adopter pour **maximiser la probabilité de choisir le *tout meilleur* candidat** ?
  - Si vous choisissez trop tôt, vous ratez l'occasion de trouver mieux
  - Si vous laissez passer trop de candidats, en espérant trouver mieux, il est fort probable que vous allez en fait rater le meilleur choix !

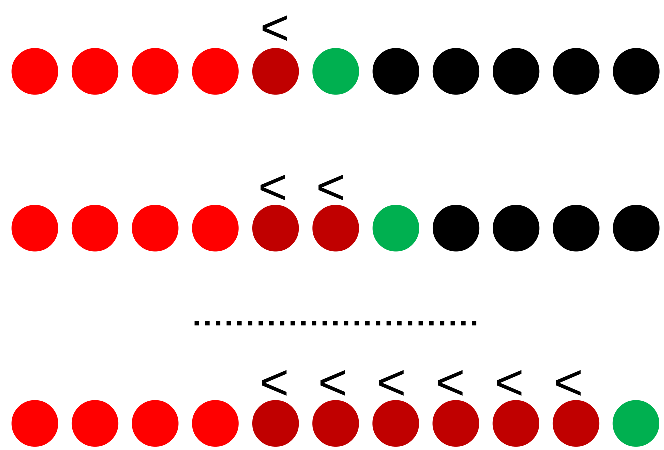
Le (second) mariage de Kepler (1613) ou le cabinet de recrutement

- **Stratégie proposée :** vous interviewez k candidats **sans intention de les garder**. Puis, vous prenez le **premier** candidat (s'il en reste un !) **meilleur** que ces k candidats
- Comment choisir k pour **maximiser** ainsi la probabilité $P(n,k)$ de sélectionner **le tout meilleur candidat** ?

$$n = 11$$

$$k = 4$$

(Kepler !)



$$1 \times \frac{1}{n}$$

$$+ \frac{k}{k+1} \times \frac{1}{n}$$

$$+ \frac{k}{k+2} \times \frac{1}{n}$$

....

$$+ \frac{k}{n-1} \times \frac{1}{n}$$

Le (second) mariage de Kepler (1613) ou le cabinet de recrutement

- **Stratégie proposée :** vous interviewez k candidats **sans intention de les garder**. Puis, vous prenez le **premier** candidat (s'il en reste un !) **meilleur** que ces k candidats
- La probabilité $P(n,k)$ de sélectionner **le tout meilleur candidat** est donc

$$P(n,k)=\frac{1}{n}\times\left(1+\frac{k}{k+1}+\frac{k}{k+2}+\ldots+\frac{k}{n-1}\right)$$

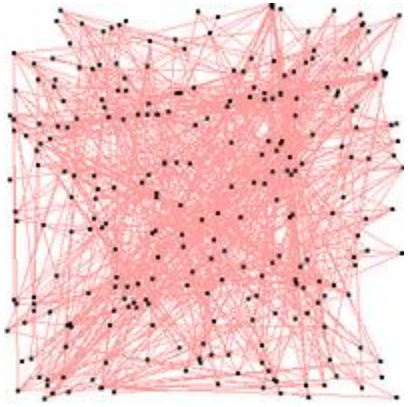
- $P(n,k)$ est maximum pour $k_{\text{max}}=\left[\frac{n-1}{\text{e}}\right],\quad \text{e}=2,718218\ldots$

$$P_{\text{max}}=P(n,k_{\text{max}})=\frac{1}{\text{e}}=0,367879\ldots\approx 36,8\,\%$$

- **Kepler a bien jeté son dévolu sur son 5ième choix !!!**

Conclusion en guise de réflexion
Les coïncidences vraiment significatives ?

- Dans nos vies, nous sommes sujets à des **coïncidences** parfois troublantes auxquelles nous donnons parfois volontiers **un sens**
- **Coïncidence :** événement, fruit du « hasard » et sans causalité apparente, qui aurait « normalement » dû arriver avec une très faible probabilité
- **N.B.** : on ne remarque pas la multitude de coïncidences possibles**… qui ne se produisent pas** !
- Des coïncidences connues
  - Géométriques
  - Gagner le gros lot du Loto
  - Éclipses solaires… avant que l'on ne comprenne


607 4-alignements de 269 points

Conclusion en guise de réflexion
Les coïncidences vraiment significatives ?

- Quelle est la probabilité ***p*** (à la louche) pour **qu'une fois au moins dans l'année, vous pensiez à l'une de vos 10 connaissances** les plus importantes, et que **celle-ci vous appelle moins d'une minute après** ?

$C = \#$ de connaissances importantes

$T = \#$ moyen de coups de fil reçus par jour de celles-ci

$P = \#$ de fois par jour où vous pensez à l'une d'entre elles

$$p_{1\ \text{minute}} = \frac{T}{1000} \times \frac{P}{1000} \times \frac{1}{C} \quad (\sim 1000 \text{ minutes d'activité/jour})$$

$$p = 1 - (1 - p_{1\ \text{minute}})^{365 \times 1000}$$

$$T = 2,\ \ P = 3,\ \ C = 10 \Rightarrow p \approx 20\%$$

Quelle coïncidence : c'est la fin !
Merci de votre attention

*Présentation téléchargeable (avec d'autres présentations de vulgarisation) sur ma page sur le site du **LPT Toulouse***

Probabilité d'intersection p d'une aiguille de longueur a avec de lattes de largeur $L > a$

- Toutes les positions différentes de l'aiguille mises bout à bout forment un polygone à N côtés. Plus N est grand, plus ce polygone se rapproche d'un cercle
- Le périmètre de ce cercle vaut $P = Na$, et son diamètre vaut $D = P / \pi = Na / \pi$
- Le nombre d'intersections n du cercle avec les lattes du parquet est donné par $n = 2 \times D / L = 2Na / \pi$
- Finalement, on trouve bien le résultat annoncé dans la présentation :

$$p \approx \frac{n}{N} = \frac{2a}{\pi L}$$