

# ***Lentilles gravitationnelles***

## ***Quelques détails et applications***

***Y. Mellier***

**Institut d'Astrophysique de Paris**

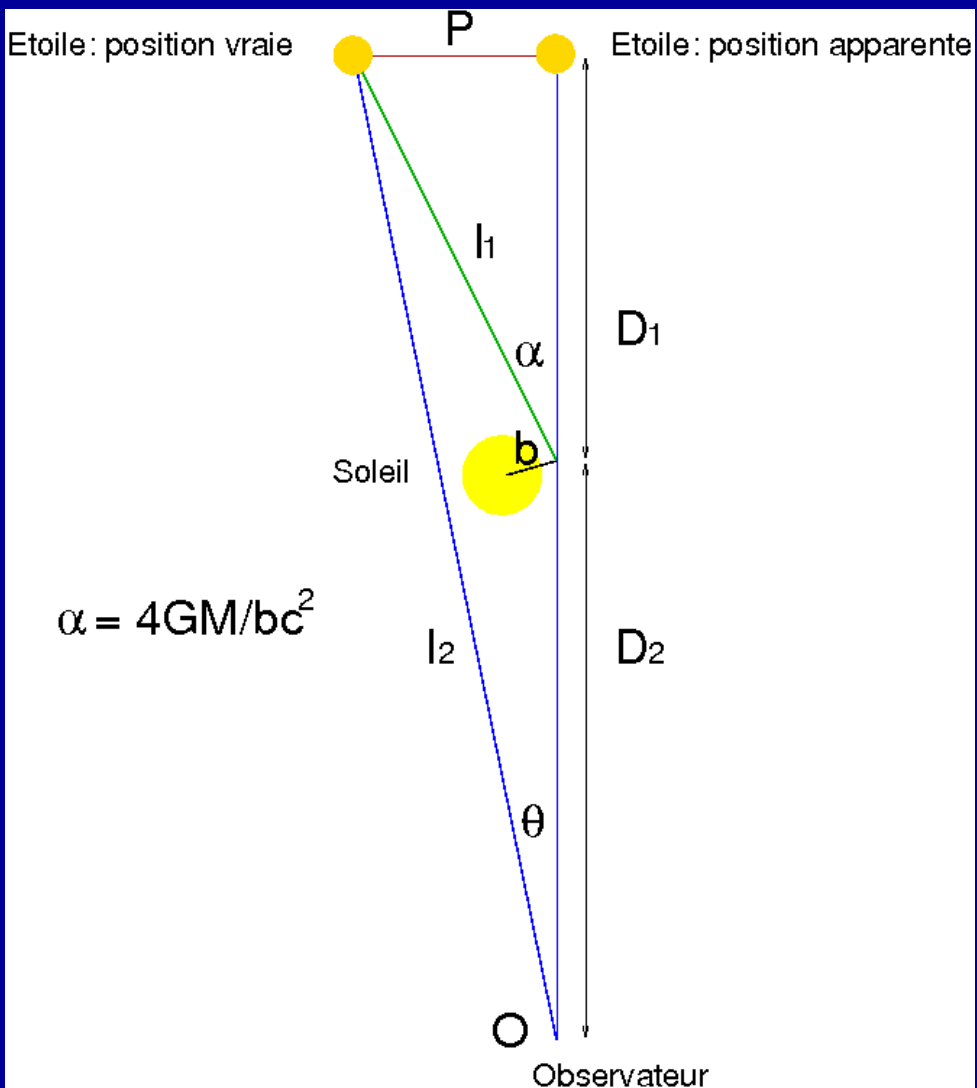
**&**

**Observatoire de Paris**

*Fleurance , 14 aout 2006*

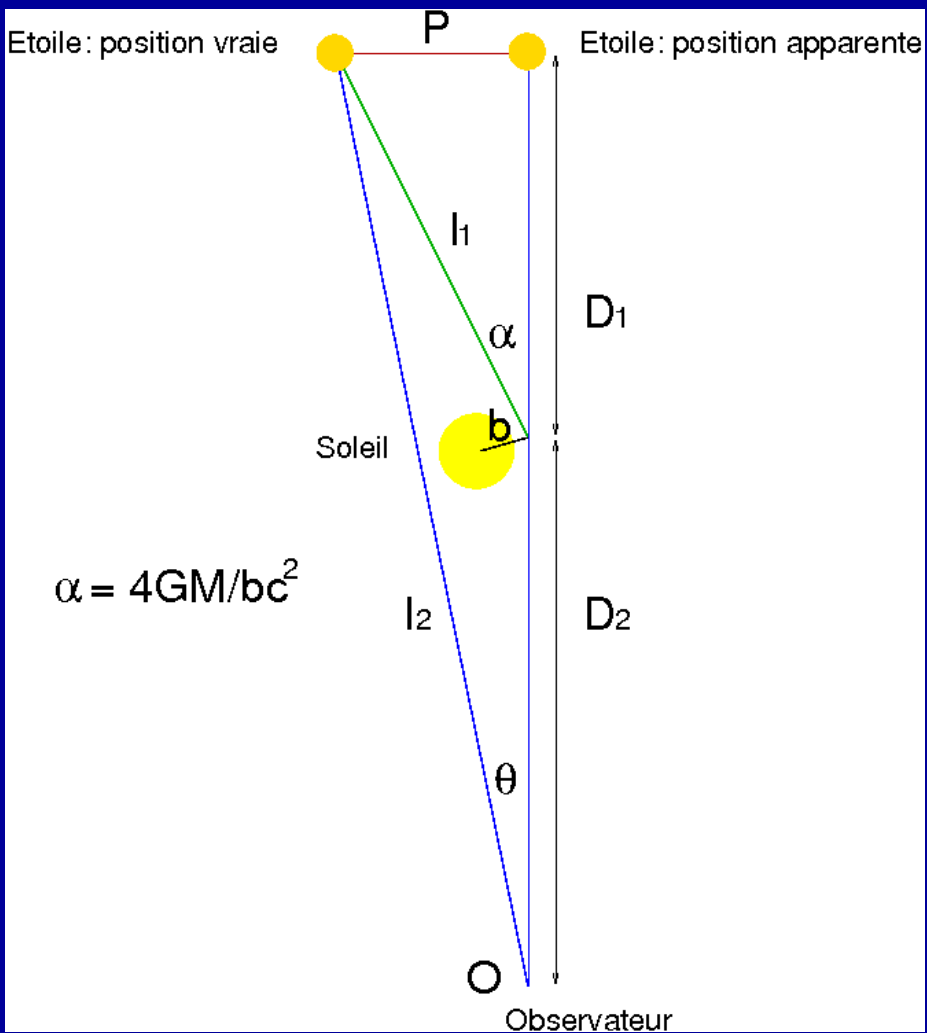
# Exercice 1

Angle de déflexion au voisinage du Soleil



La déflexion étant mesurée, calculer la masse du Soleil

$$\alpha = 1.75 \text{ seconde d'arc}$$



## La déflexion étant mesurée, calculer la masse du Soleil

$$\alpha = 1.75 \text{ seconde d'arc}$$

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ (constante de la gravitation en SI)}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m (célérité de la lumière)}$$

$$b = 7 \cdot 10^8 \text{ m (1 rayon solaire)}$$

$$1 \text{ seconde d'arc} = 4.85 \cdot 10^{-6} \text{ radian}$$

$$M = 2.0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

# Exercice 2

Masse d'une galaxie défléchitrice de la  
lumière d'un quasar

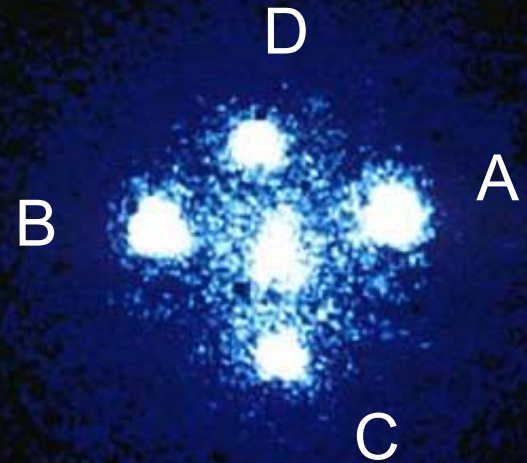
# La « Croix d'Einstein »

La galaxie 2227+030

Redshift  $z=0.0394$

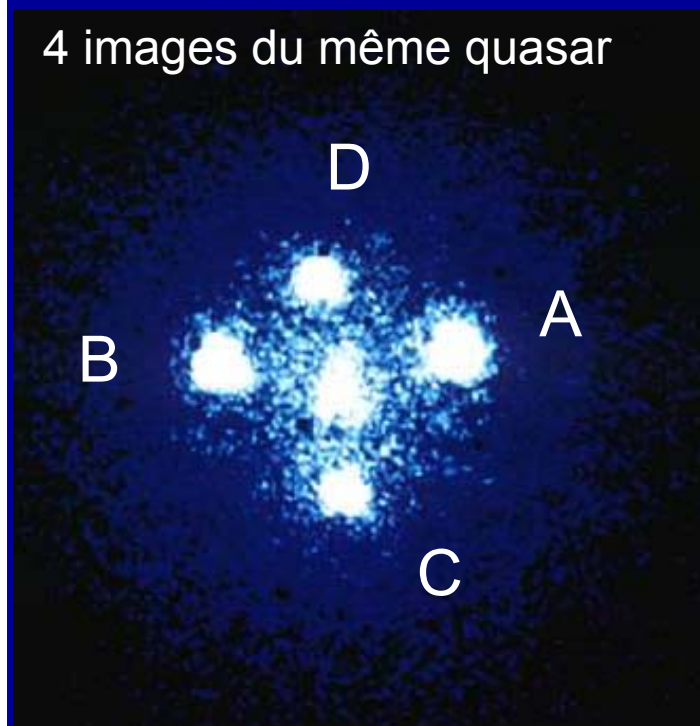
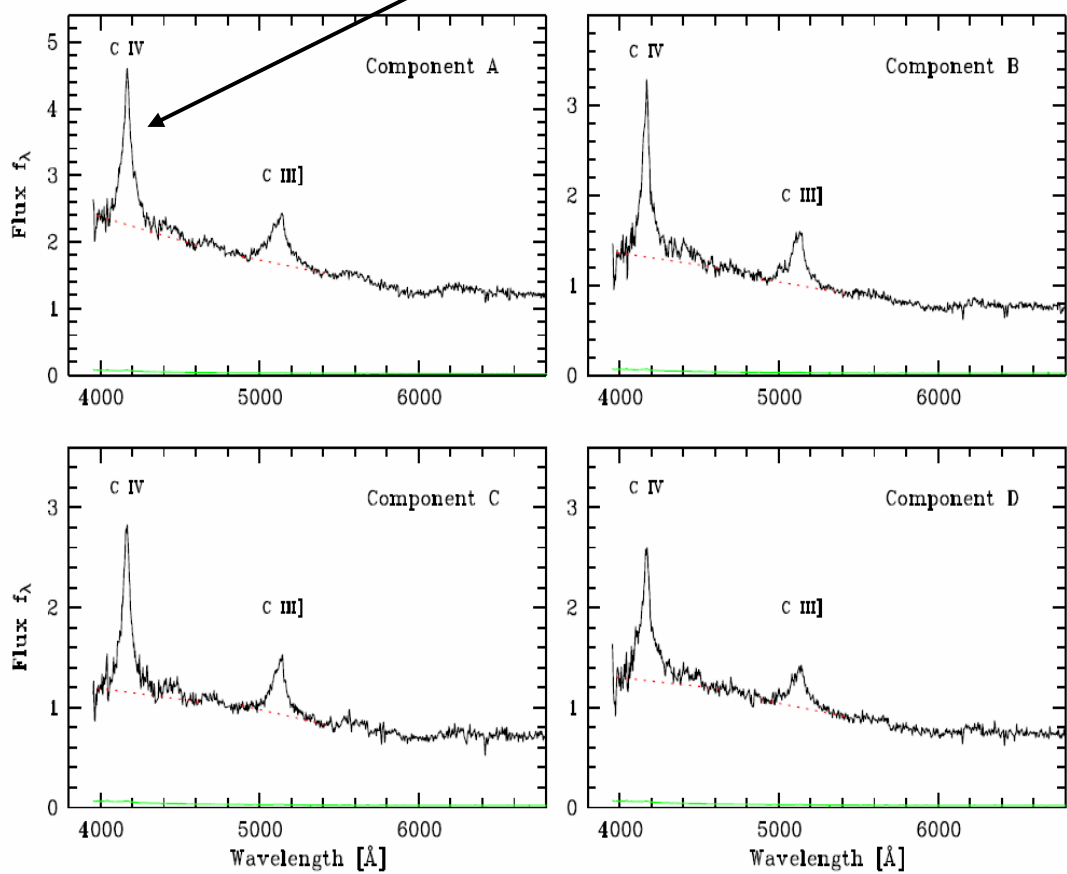


4 images du même quasar

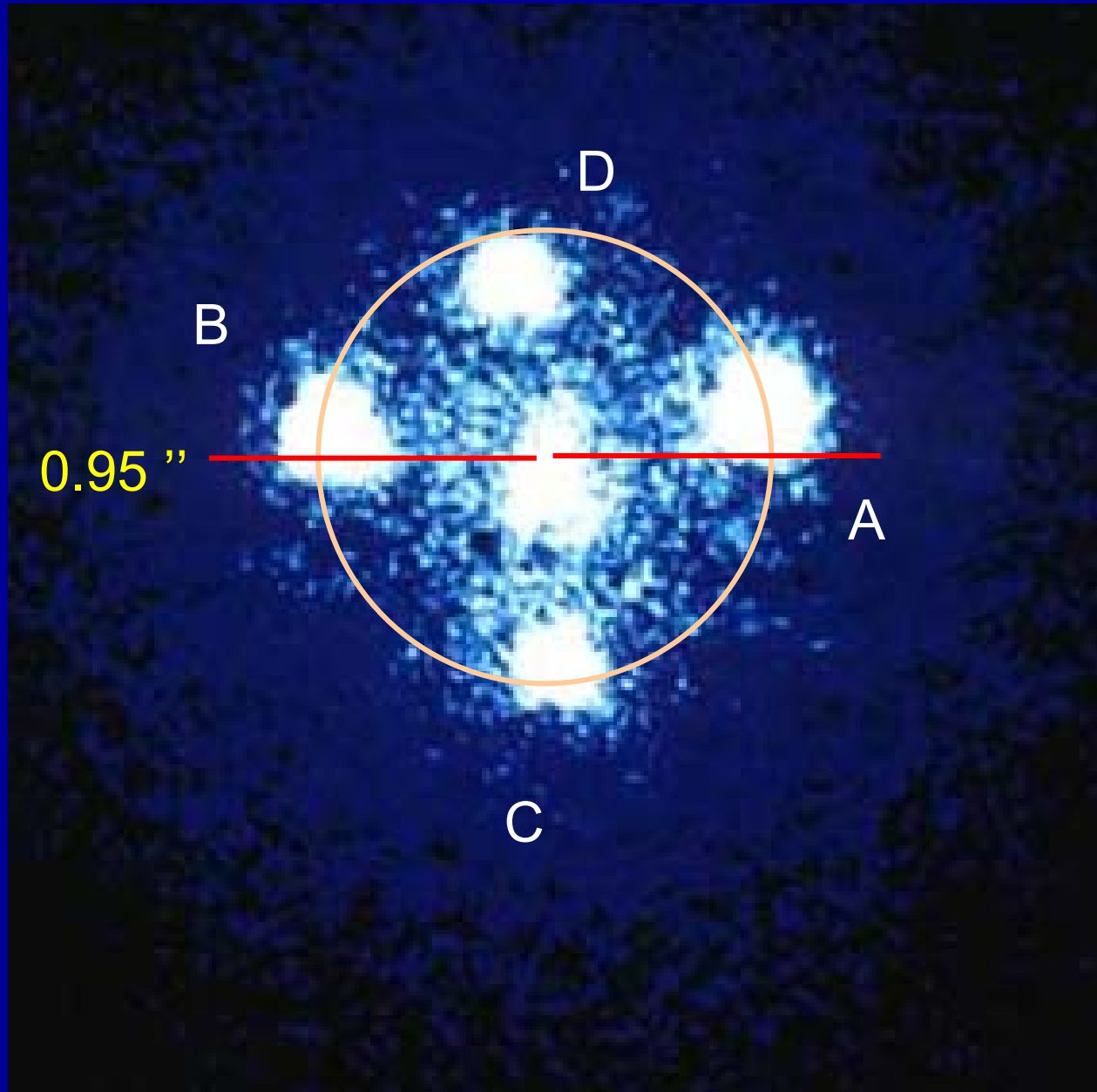


# La « Croix d'Einstein »

Raie d'émission CIV à 154.9 nm vue à 417.6 nm :  $1+z = 2.695$



# La « Croix d'Einstein »





# La « Croix d'Einstein »

## Calcul de la masse défectrice

•  $D = cz / H_0$  cette expression n'est valide que pour des distances faibles pour que les corrections relativistes soient négligeables. Comme  $z \ll 1$ , c'est effectivement le cas.

- On choisit  $H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc}$ .

$$\rightarrow D = 168 \text{ Mpc}$$

- D'où l'on peut estimer le paramètre d'impact

$$\rightarrow b = 0.95 \cdot 4.85 \cdot 10^{-6} D = 7.7 \cdot 10^{-4} \text{ Mpc}$$

$$M = 0.95 \cdot 4.85 \cdot 10^{-6} \cdot 7.7 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6 \cdot 3.08 \cdot 10^{16} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 / 4 / 6.67 \cdot 10^{-11}$$

$$M = 1.84 \cdot 10^{10} \text{ Masses solaires}$$

# La « Croix d'Einstein »

## Calcul de la masse déflectrice

- *En déduire la masse déflectrice. Pouvez vous interpréter le sens de cette masse calculée?*

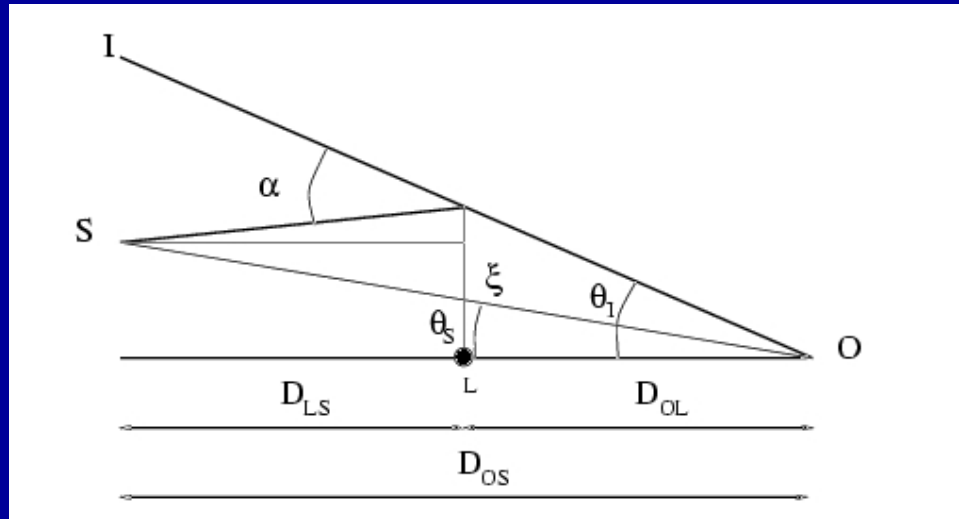
Cette masse n'est pas très élevée car ce type de galaxie atteint plutôt  $10^{12}$  masses solaires.

Mais il faut se souvenir que la masse calculée est celle contenue dans le cône sous-tendu par les 4 images du quasar. Or ce cône a un diamètre très inférieur à la taille visible de la galaxie. On ne « voit » donc qu'une fraction de la masse.

# Exercice 3

Calcul simple du nombre et de la forme  
des images

# Cas d'une masse ponctuelle à une dimension



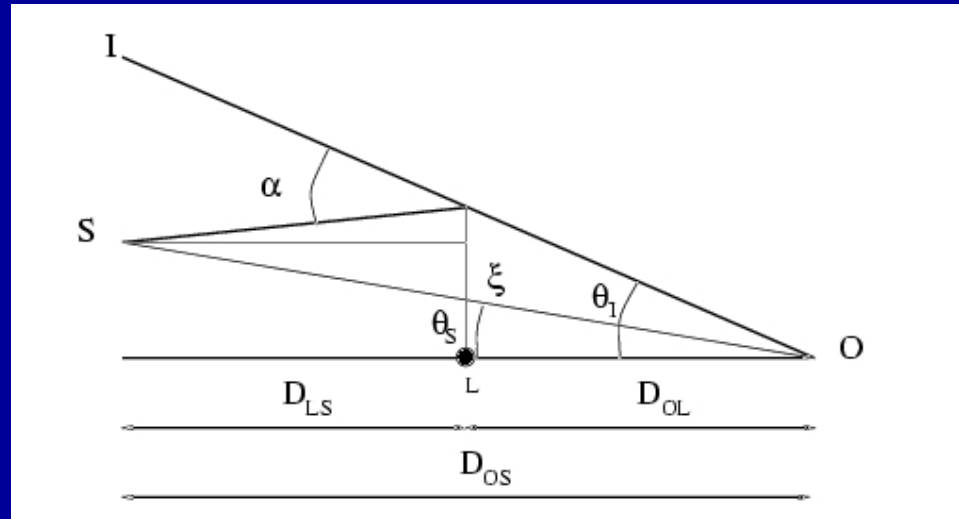
« Equation des lentilles »

Angle de déflexion

Trouvez l'équation géométrique qui relie la position apparente de l' image,  $\theta_I$ , à la position vraie de la source,  $\theta_S$ , et à l'angle de déflexion,  $\alpha$ . On les exprimera en fonction des distances  $D$  de la figure.

Rappelez l'expression de l'angle de déflexion pour une masse ponctuelle comme le Soleil. Exprimer le paramètre d'impact avec la distance  $D_{ol}$  de la figure.

# Cas d'une masse ponctuelle à une dimension



« Equation des lentilles »

$$\theta_s D_{os} + \alpha D_{ls} = \theta_i D_{os} \text{ ,}$$

Angle de déflexion

$$\alpha = (4G/c^2)(M/D_{ol}\theta)$$

# Cas d'une masse ponctuelle à une dimension

« Equation des lentilles »

$$\theta_s D_{os} + \alpha D_{ls} = \theta_i D_{os} ,$$

Angle de déflexion

$$\alpha = (4G/c^2)(M/D_{ol}\theta)$$

- Trouvez et discutez les solutions graphiquement
  - Pour une source ponctuelle
  - Pour une source unidimensionnelle rectiligne
  - Pour une source circulaire
- Comment sont modifiées ces solutions pour un défecteur plus réaliste?

# Cas d'une masse ponctuelle à une dimension

« Equation des lentilles »

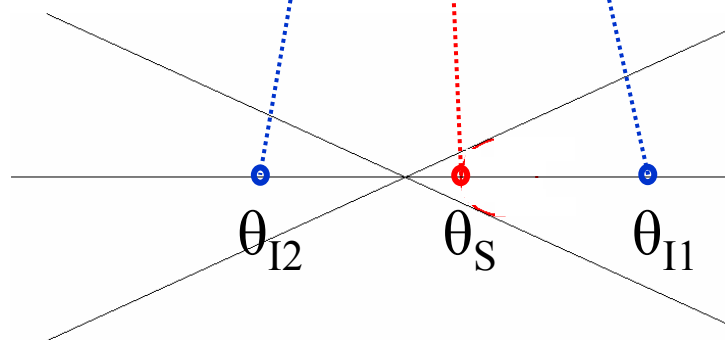
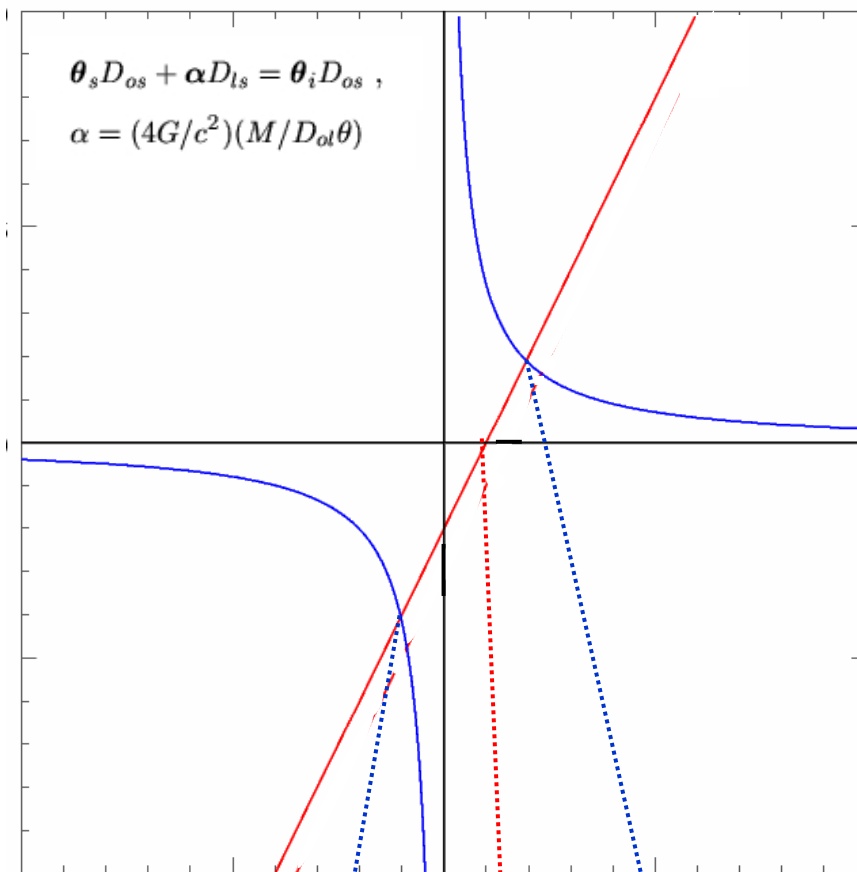
$$\theta_s D_{os} + \alpha D_{ls} = \theta_i D_{os} ,$$

Angle de déflexion

$$\alpha = (4G/c^2)(M/D_{ol}\theta)$$

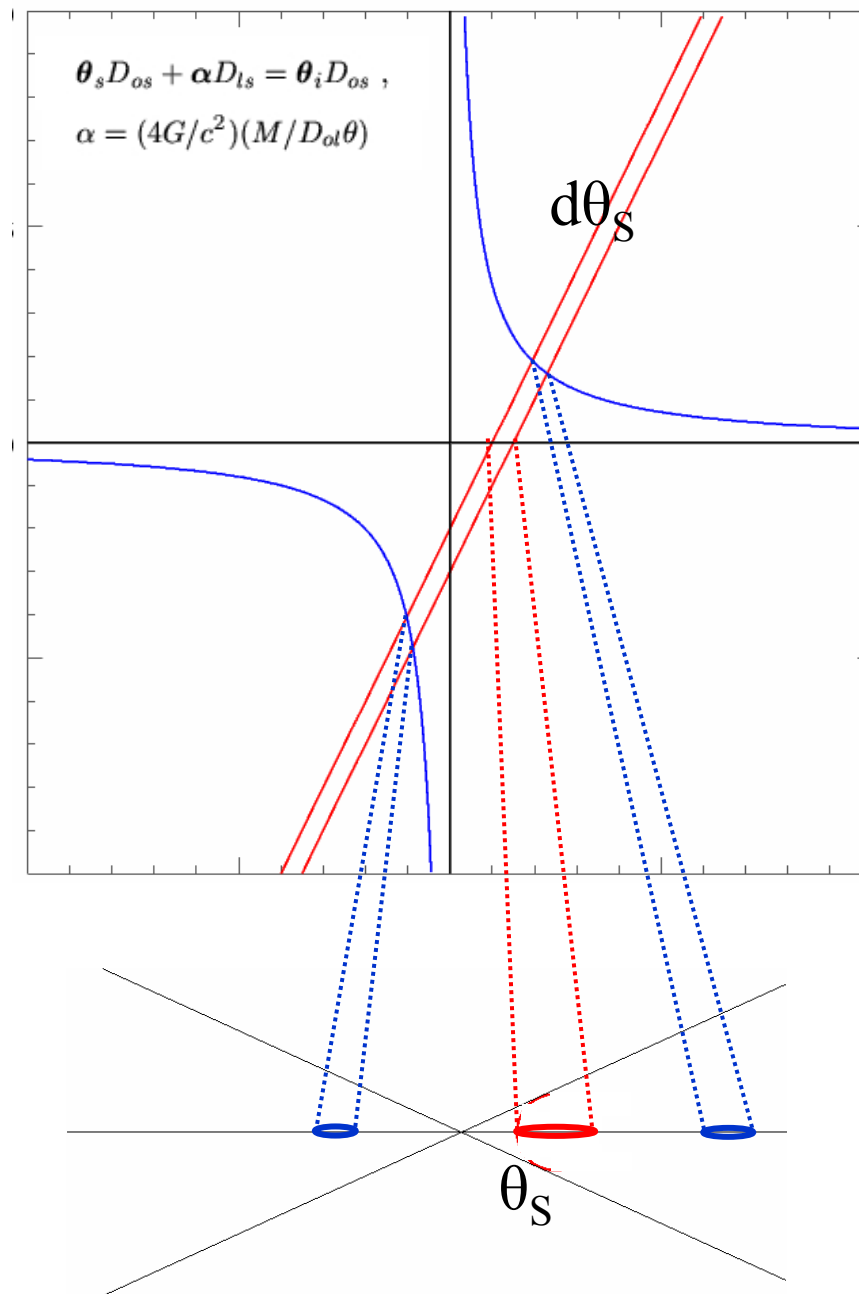
- La première équation :  $\alpha(\theta_i)$  est une droite
- La seconde équation :  $\alpha(\theta_i)$  est une hyperbole
- Leur intersection donne les solutions

Cas d'une  
masse  
ponctuelle et  
d'une source  
ponctuelle

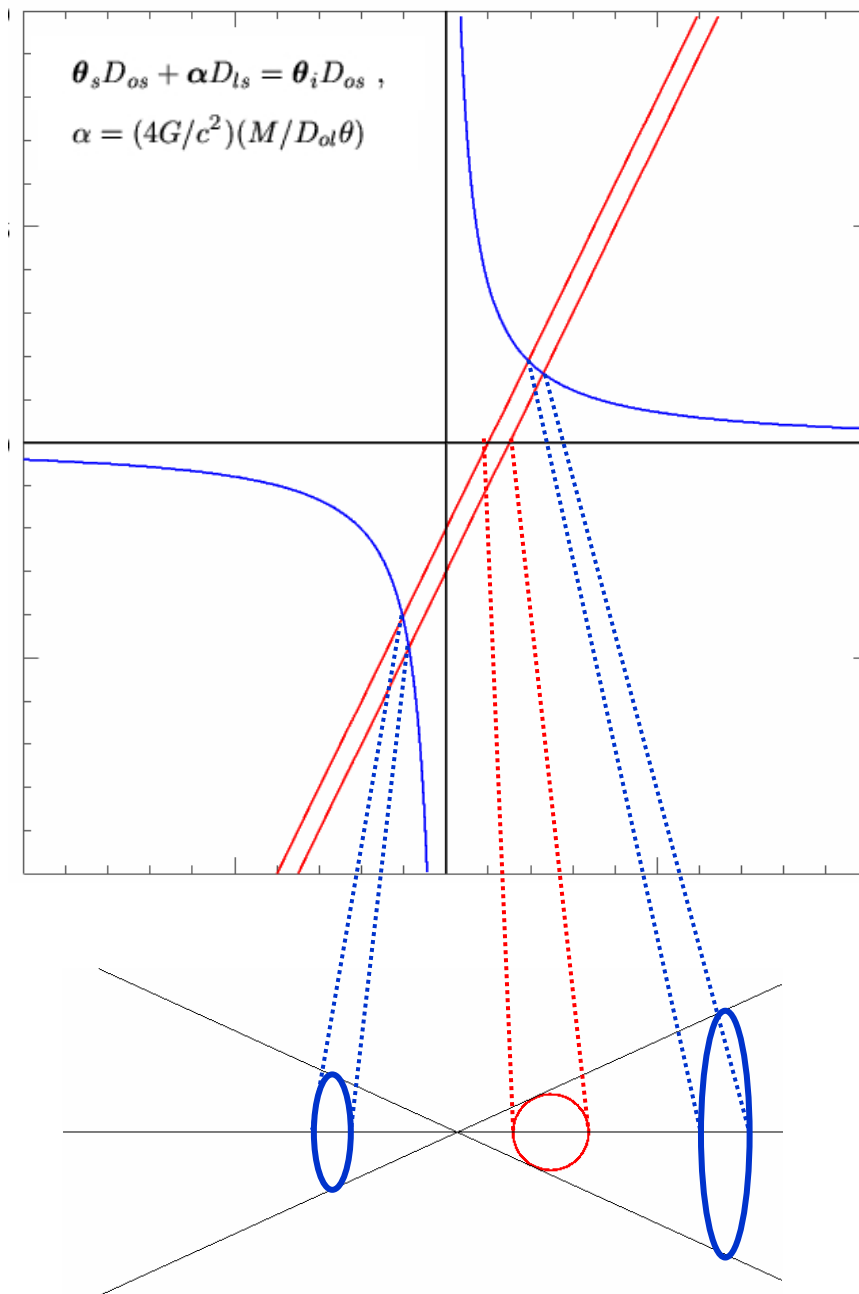




Cas d'une  
masse  
ponctuelle et  
d'une source  
étendue à 1-  
dimension

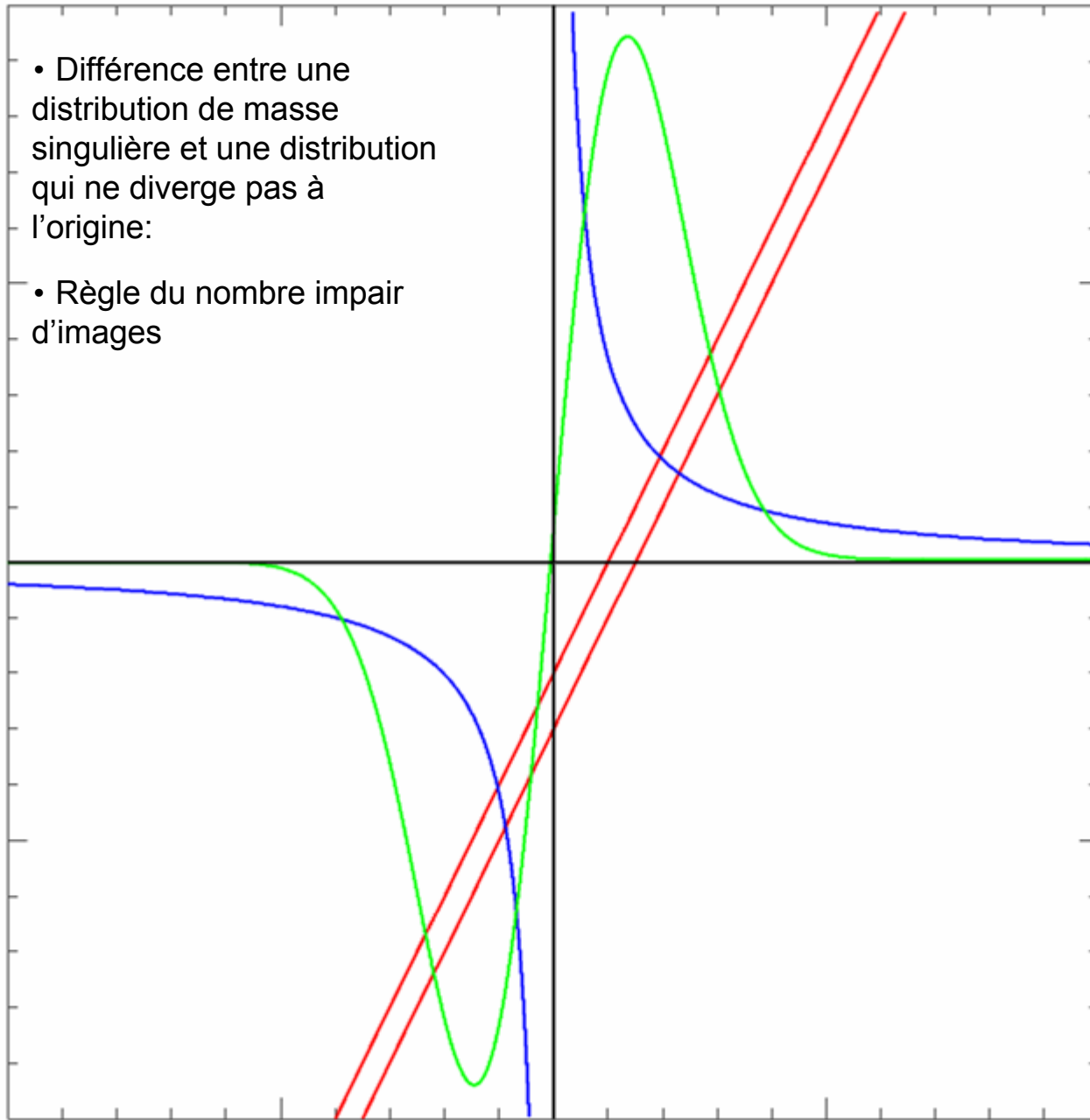


Cas d'une  
masse  
ponctuelle et  
d'une source  
étendue à 2-  
dimension



- Différence entre une distribution de masse singulière et une distribution qui ne diverge pas à l'origine:

- Règle du nombre impair d'images



# Exercice 4

Anneaux d'Einstein

# Définition du rayon d'Einstein

A partir de l'équation géométrique des lentilles et de celle pour l'angle de déflexion, trouvez l'angle de déflexion pour un alignement Source-Lentille-Observateur parfait.

Pour un cas bi-dimensionnel cet angle est celui de l'anneau d'Einstein. A quelle configuration exceptionnelle correspond il?

Calculez cet angle

- pour une étoile-source à 1 kpc et un défecteur de masse solaire à la distance du Soleil
- pour une galaxie-source à 400 Mpc et un défecteur à 150 Mpc, de masse  $10^{11}$  masses solaire.

# Définition du rayon d'Einstein

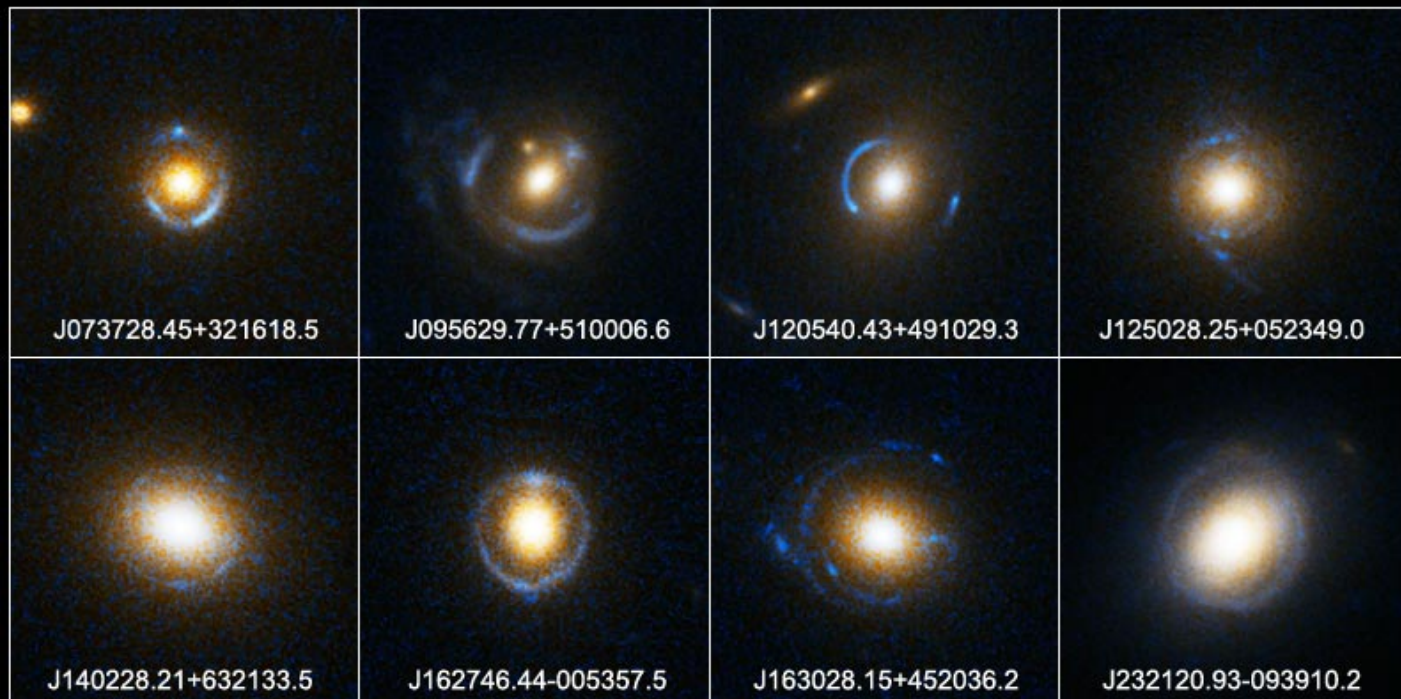
$$\theta_S = \theta_I + \frac{D_{LS}}{D_{OL}D_{OS}} \frac{4GM}{c^2\theta_I} .$$

Alignement parfait :  $\theta_S = 0$

$$\theta_E = \left[ \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OL}D_{OS}} \right]^{1/2} .$$

## Einstein Ring Gravitational Lenses

Hubble Space Telescope • ACS



# Définition du rayon d'Einstein

$$\theta_S = \theta_I + \frac{D_{LS}}{D_{OL}D_{OS}} \frac{4GM}{c^2 \theta_I} .$$

Alignement parfait :  $\theta_S = 0$

$$\theta_E = \left[ \frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_{OL}D_{OS}} \right]^{1/2} .$$

- Etoile à 1 kpc, déflecteur=Soleil:

$$\theta_E = 0.003''$$

$\theta_E$

- Galaxie à 400Mpc, déflecteur = galaxie de  $10^{11}$  masses solaires à 150Mpc:

$$\theta_E = 1.84''$$

# A propos du rayon d'Einstein

- Pour une étoile, on a donc

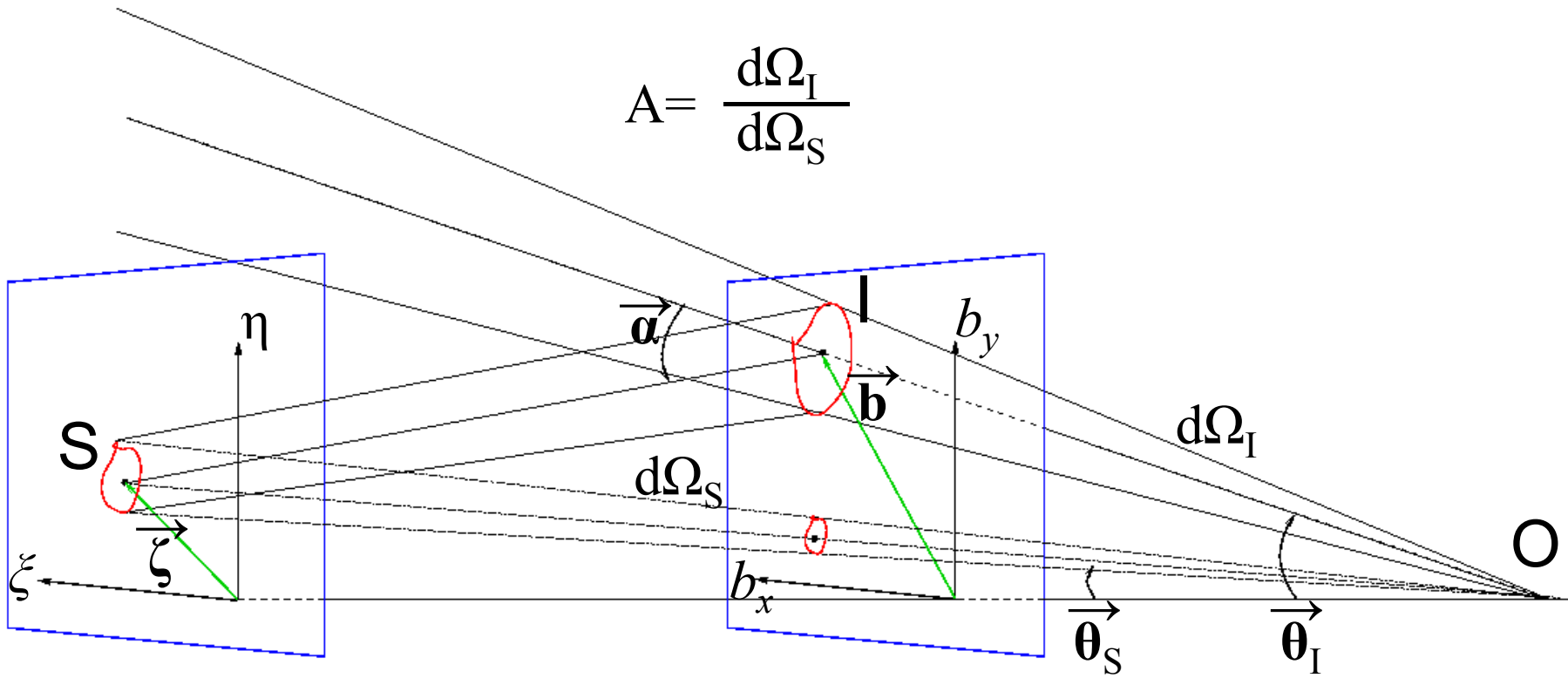
$$\theta_E = 0.003''$$

Connaissant la résolution des télescopes et les «seeings» des sites d'observation astronomique que signifie en pratique une valeur si petite?



# Amplification

$$A = \frac{d\Omega_I}{d\Omega_S}$$



# Exercice 5

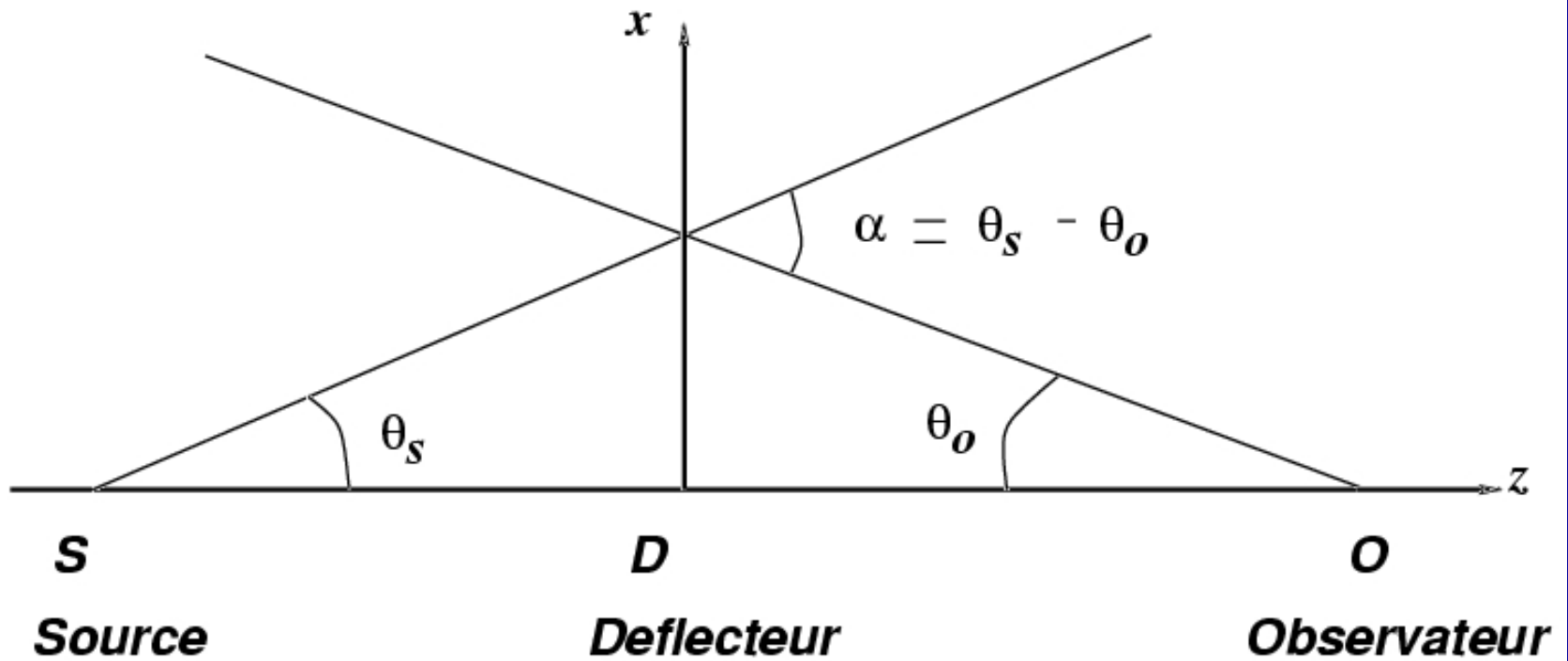
Calcul complet et détaillé de l'angle de  
déflexion

(difficile: sera un calcul fait par moi et commenté)

# Lentilles gravitationnelles

- Lentille minces
- Petits angles de déflexion
- Champs faibles
- Champs stationnaires
- Lentilles transparentes

# Configuration idéalisée d'une déflexion gravitationnelle



$$\left. \frac{dx}{dl} \right|_S = \theta_s$$

$$\left. \frac{dx}{dl} \right|_O = -\theta_o$$

# Notations et symboles

## Métrie:

- $ds^2 = a^2(\eta)d\check{s}^2 = a^2(\eta) \cdot \check{G}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$

- $d\check{s}^2 = (1 + 2 \Phi/c^2) d\eta^2 - (1 - 2 \Phi/c^2) \cdot \{d\chi^2 + f^2(\omega) \cdot (d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2)\}$

ou

- $f^2(\omega) = \begin{cases} K^{1/2} \cdot \text{Sin}[K^{1/2} \chi], & K > 0 \\ \chi & K = 0 \\ (-K)^{1/2} \cdot \text{Sinh}[(-K)^{1/2} \chi], & K < 0 \end{cases}$

- $d\chi = dr / (1 - Kr^2)$

Potentiel gravitationnel

- $\Phi(\mathbf{x}) = -G \int d^3 \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}') / |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$

# Calcul de l'angle de déflexion

Champs faibles:  $ds^2 = c^2 \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2\Phi}{c^2}\right) dl^2 .$

Pour un photon  $ds^2=0$  :

$$dt = \frac{1}{c} \left( \frac{1 - \frac{2\Phi}{c^2}}{1 + \frac{2\Phi}{c^2}} \right)^{1/2} dl \approx \frac{1}{c} \left( 1 - \frac{2\Phi}{c^2} \right) dl .$$

$$\Rightarrow ct = \int \left( 1 - \frac{2\Phi}{c^2} \right) dl$$

$$ct = \int \left( 1 - \frac{2\Phi}{c^2} \right) \left[ \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} dz . \quad \text{avec } dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Formellement identique à la propagation d'un faisceau dans un milieu d'indice  $n$ :

$$n = \left( 1 - \frac{2\Phi}{c^2} \right) .$$

# Calcul de l'angle de déflexion

On peut faire varier  $t$  uniquement suivant  $x(z)$ :

$$c\delta t = \int \frac{\partial n}{\partial x} \delta x \left[ \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} dz \quad (498)$$

$$+ \int n \left[ \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \frac{dx}{dz} \frac{d\delta x}{dz} dz \quad (499)$$

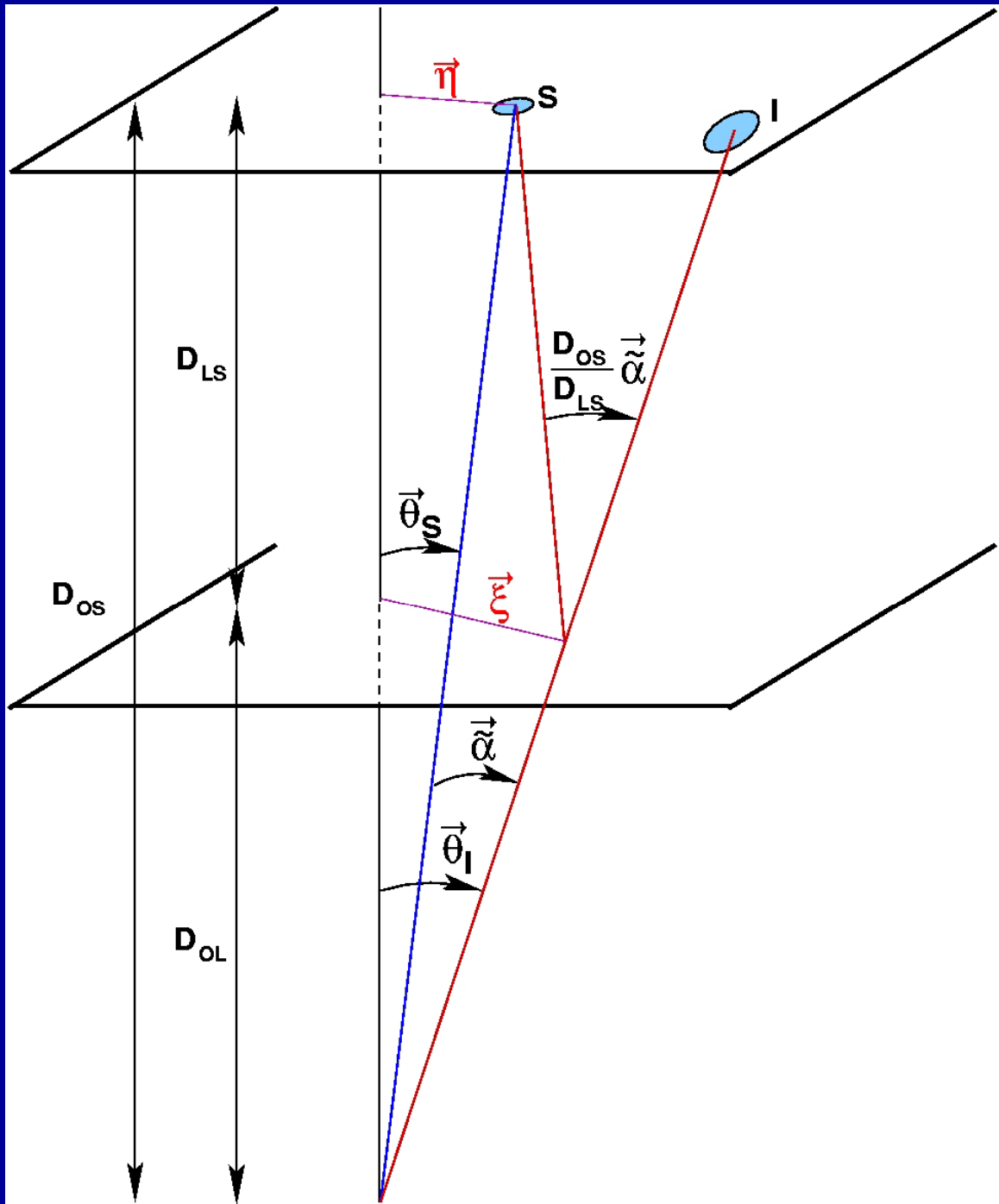
Intégration du second terme par parties :

$$\int n \left[ \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \frac{dx}{dz} \frac{d\delta x}{dz} dz = \left[ \delta x \ n \left[ \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \right]_S^O \quad (500)$$

$$- \int dz \ \delta x \ \frac{d}{dz} \left\{ n \frac{dx}{dz} \left[ \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \right\} \quad (501)$$

Comme  $\delta x = 0$  en S et O (points source et observateur), le premier terme est nul et donc:

$$c\delta t = \int dz \ \delta x \ \left\{ \frac{\partial n}{\partial x} \left[ \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} - \frac{d}{dz} \left[ n \frac{dx}{dz} \left[ \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \right] \right\} . \quad (502)$$



Configuration plus réaliste



Principe de Fermat :  $\delta t = 0 \quad \forall x$ :

$$\frac{\partial n}{\partial x} \left[ \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} = \frac{d}{dz} \left[ n \frac{dx}{dz} \left[ \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \right]. \quad (503)$$

Soit, en intégrant:

$$\int dz \frac{\partial n}{\partial x} \left[ \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} = \int d \left[ n \frac{dx}{dz} \left[ \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dy}{dz} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \right]. \quad (504)$$

$$\Rightarrow \int_S^O \frac{\partial n}{\partial x} dl = \int_S^O d \left[ n \frac{dx}{dl} \right]. \quad (505)$$

Comme en S et en O, le champ du déflecteur est nul,  $n(S)=n(O)=1$ :

$$\Rightarrow \int_S^O \frac{\partial n}{\partial x} dl = \left( \frac{dx}{dl} \right)_S - \left( \frac{dx}{dl} \right)_O = \theta_S - \theta_O = \alpha \quad (506)$$

Généralisation pour une configuration (x,y)

$$\alpha = \int_S^O \nabla_{\perp} n \, dl. \quad (507)$$

Compte tenu de la relation en  $n$  et  $\Phi$  :

$$\alpha = -\frac{2}{c^2} \int_S^O \nabla_{\perp} \Phi \, dl.$$

Calcul de  
l'angle de  
déflexion

On a

$$\theta_S = \theta_I + \alpha$$

avec

$$\alpha = \frac{2}{c^2} \int \nabla_{\perp} \cdot dl = \frac{2}{c^2} \int_0^{\chi_S} \frac{[f(\chi_S - \chi_L)]}{f(\chi_S)} \cdot \nabla_{\perp} \Phi(\chi) d\chi$$

Hyp: la lentille est mince : la déflexion de la lumière se produit dans une région suffisamment petite par rapport à la distance source-observateur.

Dans ce cas, on peut intégrer selon la ligne de visée la densité de matière en intégrant dans tout le domaine  $[-\infty; +\infty]$ . On a donc:

$$\alpha = \frac{2G}{c^2} \frac{[f(\chi_S - \chi_L)]}{f(\chi_S)} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \nabla_{\perp} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3\mathbf{r}'$$

Posons

$$\mathbf{r}' = \boldsymbol{\xi}' + z'\mathbf{e}$$

On a donc

$$\nabla_{\perp} \left( \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = - \frac{(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

et donc

$$\alpha = \frac{[f(\chi_S - \chi_L)]}{f(\chi_S)} \times \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int \rho(\boldsymbol{\xi}, z') \cdot (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}') \cdot \left[ \frac{1}{|(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}')^2 + (z - z')^2|^{3/2}} \right] d^2\xi dz'$$

Or

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{1}{|(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}')^2 + (z - z')^2|^{3/2}} \right] dz = \frac{2}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'|^2}$$

donc

$$\alpha = \frac{[f(\chi_S - \chi_L)]}{f(\chi_S)} \int \left[ \frac{(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}')}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'|^2} \right] \int \rho(\boldsymbol{\xi}', z') dz' \Rightarrow \alpha = \frac{[f(\chi_S - \chi_L)]}{f(\chi_S)} \int \left[ \frac{(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}')}{|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}'|^2} \right] \Sigma(\boldsymbol{\xi}') d^2\xi' \leftarrow \alpha - \Sigma$$

Relation  
entre l'angle  
de déflexion  
et la densité  
de matière  
projetée sur  
la ligne de  
visée