Arpenter l'univers

Jean-Philippe Uzan

Institut d'Astrophysique de Paris

Laboratoire de Physique Théorique, Orsay

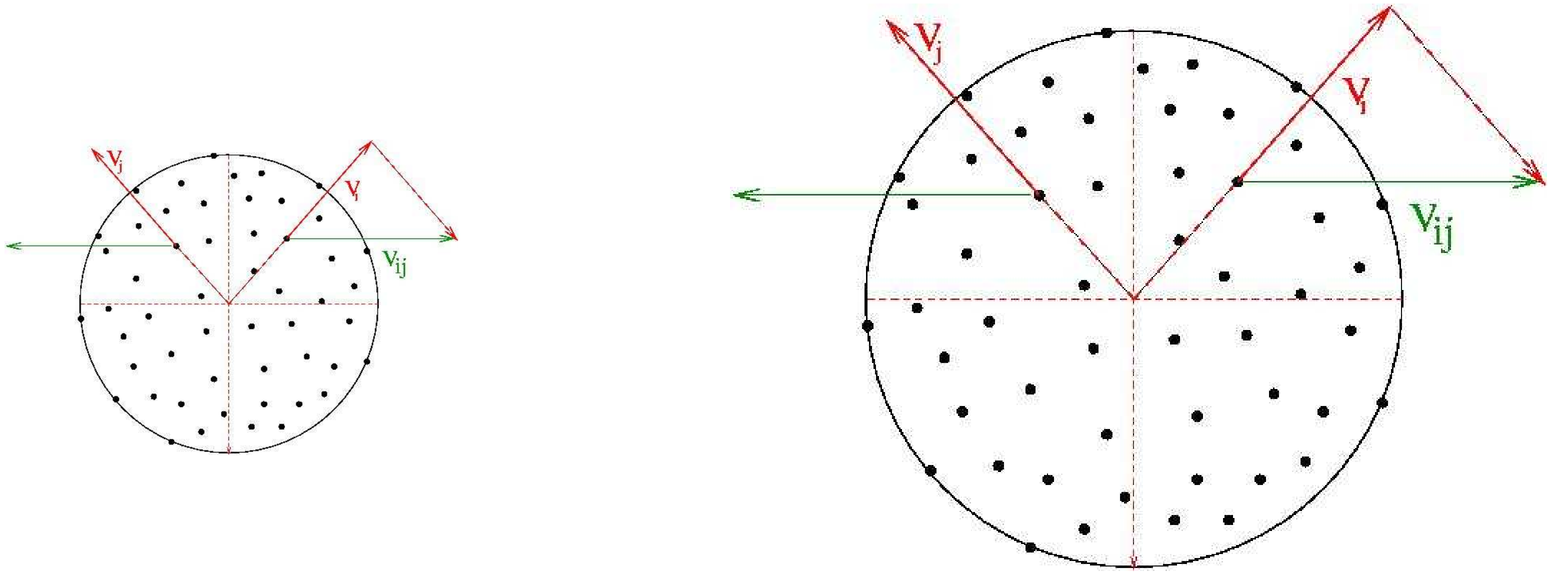
Plan

- Les équations de Friedmann
- Distances : un choix difficile
- Application à la cosmologie
- Conclusions

Les équations de Friedmann

Modèle : sphère de *poussière* (P=0) *homogène* [ρ=ρ(t)]
en évolution *homologue*

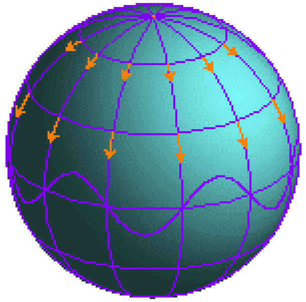
$$x = a(t)\, r$$

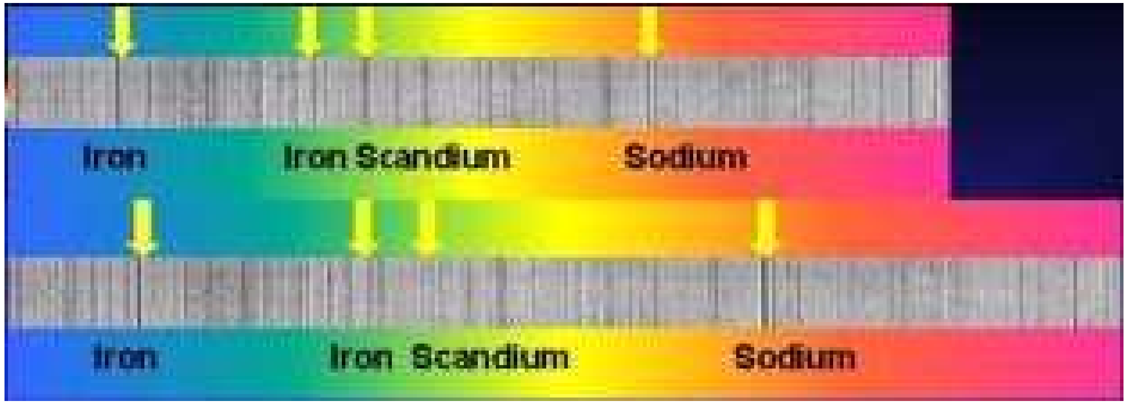


$$v_{ij} = a\text{ç}(r_i \text{ à } r_j) = H\, x_{ij}$$

Décalage vers le rouge

$$`^{phys} = a(t)\,`^{com}$$





$$1 + z = \frac{\tilde{o}^{phys}_{rec}}{\tilde{o}^{phys}_{em}} = \frac{a_{rec}}{a_{em}}$$

Loi de Hubble

$$v = H_0 d$$

Effet Doppler

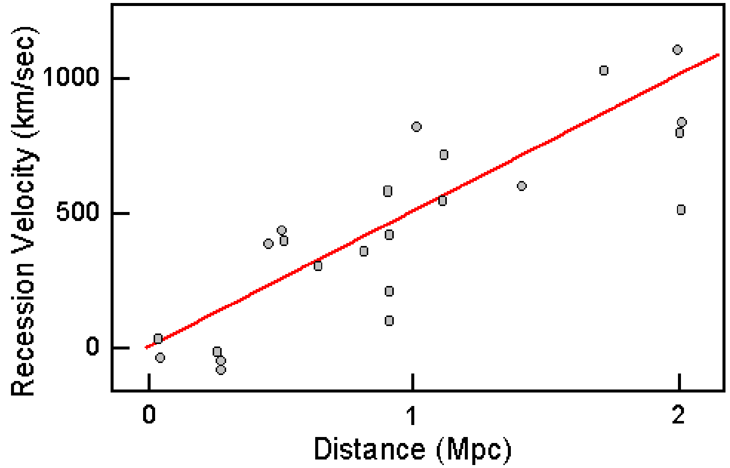
z Ø v=c

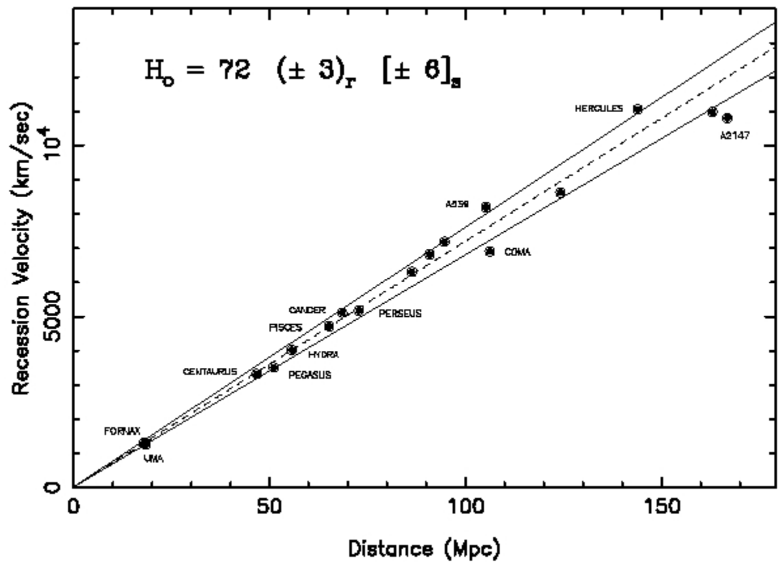
Distance

d ø z D_{H_0}

Valable pour des objets proches

Hubble's Data (1929)





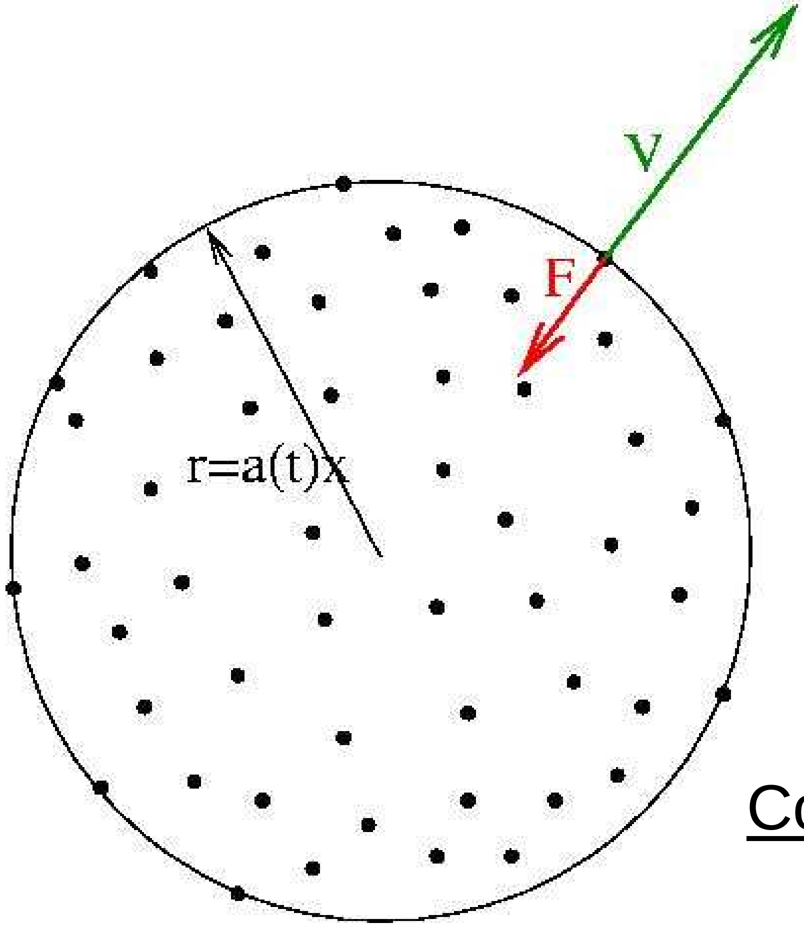
Conservation de la matière

La quantité de matière dans un boule physique de rayon x est constante

$$ú(t)\,x^{3}(t) \;/\; ú(t)a^{3}(t)$$

$$ú(t) \;/\; a^{à\,3}(t)$$

$$úç + 3Hú = 0$$



$$E_K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$E_G = - \frac{GM(< x)m}{x}$$

$$M(< x) = \frac{4\pi\rho x^3}{3}$$

Conservation l'énergie totale:

$$E = E_G + E_K = \mathrm{const.}$$

Equations de Friedmann

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2}$$

$$\dot{\rho} + 3H\rho = 0$$

Valable pour de la matière non-relativiste seulement.

Introduction de Λ

Tous les énergies sont proportionelles à x^2. On peut aussi considérer un terme de la forme

$$E_{\Lambda} = - m \frac{\Lambda c^2}{6} x^2$$

On obtient alors, les equations pour de la matière et une constante cosmologique

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

Constante cosmologique

Avec ce nouveau terme, la force agissant sur une particule est

$$F = m\left[-4\pi G\rho + \Lambda c^2\right]\frac{x}{3}$$

La constante cosmologique s'oppose donc à l'attraction gravitationelle.

Il existe d'ailleurs une solution dans laquelle elle compense exactement la gravité pour donner une distribution statique

$$\Lambda = \frac{4\pi G\rho}{c^2}; \qquad \ddot{a} = 0; \qquad \rho = \mathrm{const.}$$

Autres types de matière

L'approche newtonienne ne se généralise pas à d'autres types de matière

Pour une équation d'état P(ρ):

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0$$

Ce qui implique:

$$P = w\rho c^2 \Rightarrow \rho \propto a^{-3(1+w)}$$

Forme générale

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{Kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}$$

$$\dot\rho + 3H\left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) = 0$$

3 variables – 2 équations : P(ρ) ?

Pourquoi est-ce que ça marche ?

Conventions pour la suite

t_0 aujourd'hui

$a_0 = a(t_0)$ ñ 1

$c = 1$

ô ñ 8ùG

L'«alpha» et les Omega(s)

Introduisons

$$\Omega_0 = \frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^2} \qquad \Omega_K = -\frac{K}{a_0^2 H_0^2} \qquad \Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2}$$

L'équation de Friedmann prend la forme

$$H = H_0 E(a)$$

avec

$$E^2(a) = \Omega_0 a^{-3} + \Omega_{rad0} a^{-4} + \Omega_K a^{-2} + \Omega_\Lambda$$

On en déduit que les «Ω» sont liés par la relation

$$\Omega_0 + \Omega_{rad0} + \Omega_K + \Omega_\Lambda = 1$$

Quelques chiffres

$$H_0 = 100\,h\ \mathrm{km.s^{-1}.Mpc^{-1}}$$

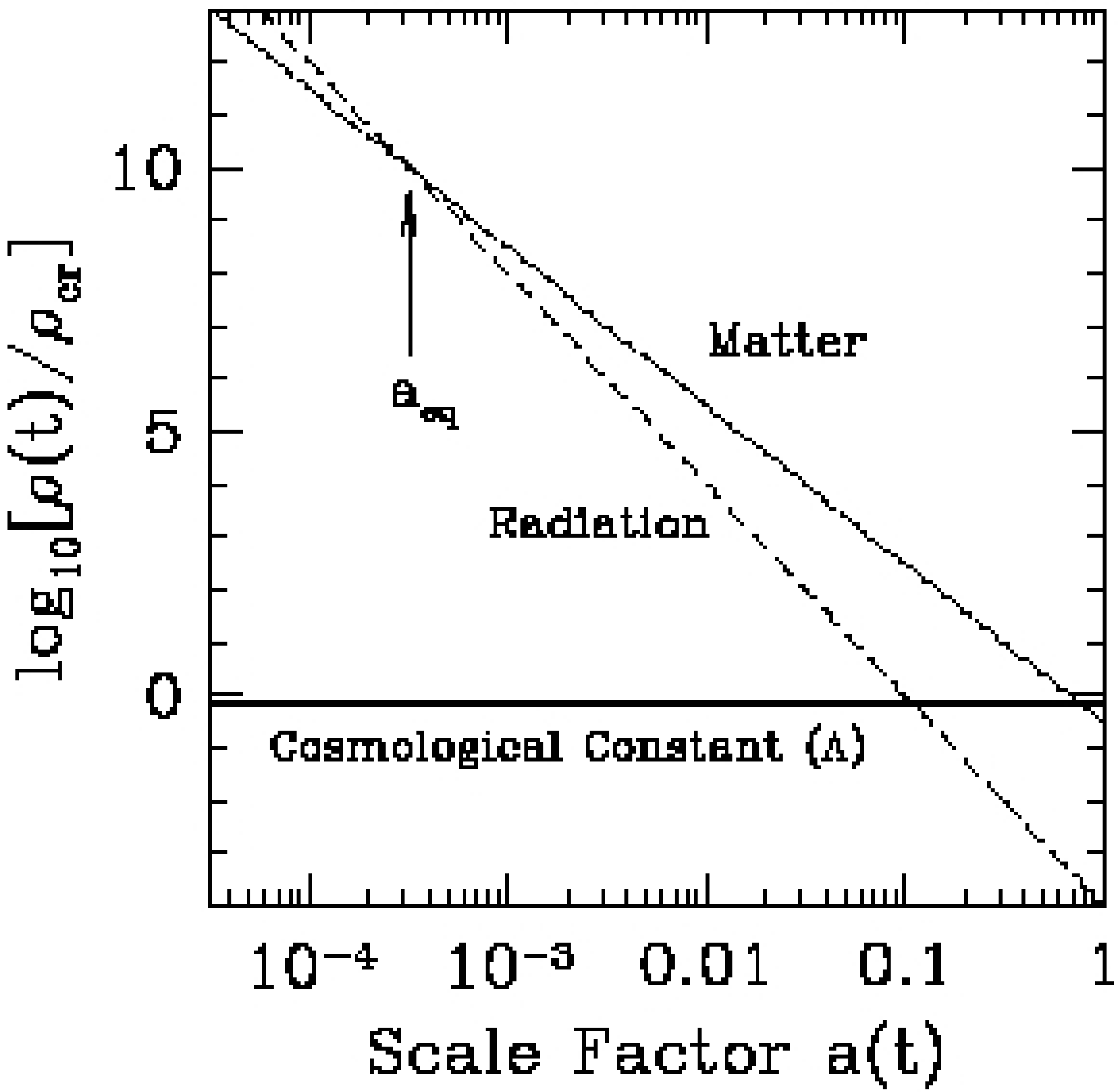
$$D_H = c/H_0 = 9.26\,h^{-1} \times 10^{25}\,\mathrm{m}$$

$$t_H = 1/H_0 = 9.78\,h^{-1} \times 10^{9}\,\mathrm{ans}$$

$$\rho_{crit} = 1.88\,h^{2} \times 10^{-29}\,\mathrm{g.cm^{-3}}$$

$$\Omega_{rad} = 4 \times 10^{-5} h^{-2} \qquad \Omega_b = 3.66 \times 10^{-3}\text{ñ}\,h^{-2}$$

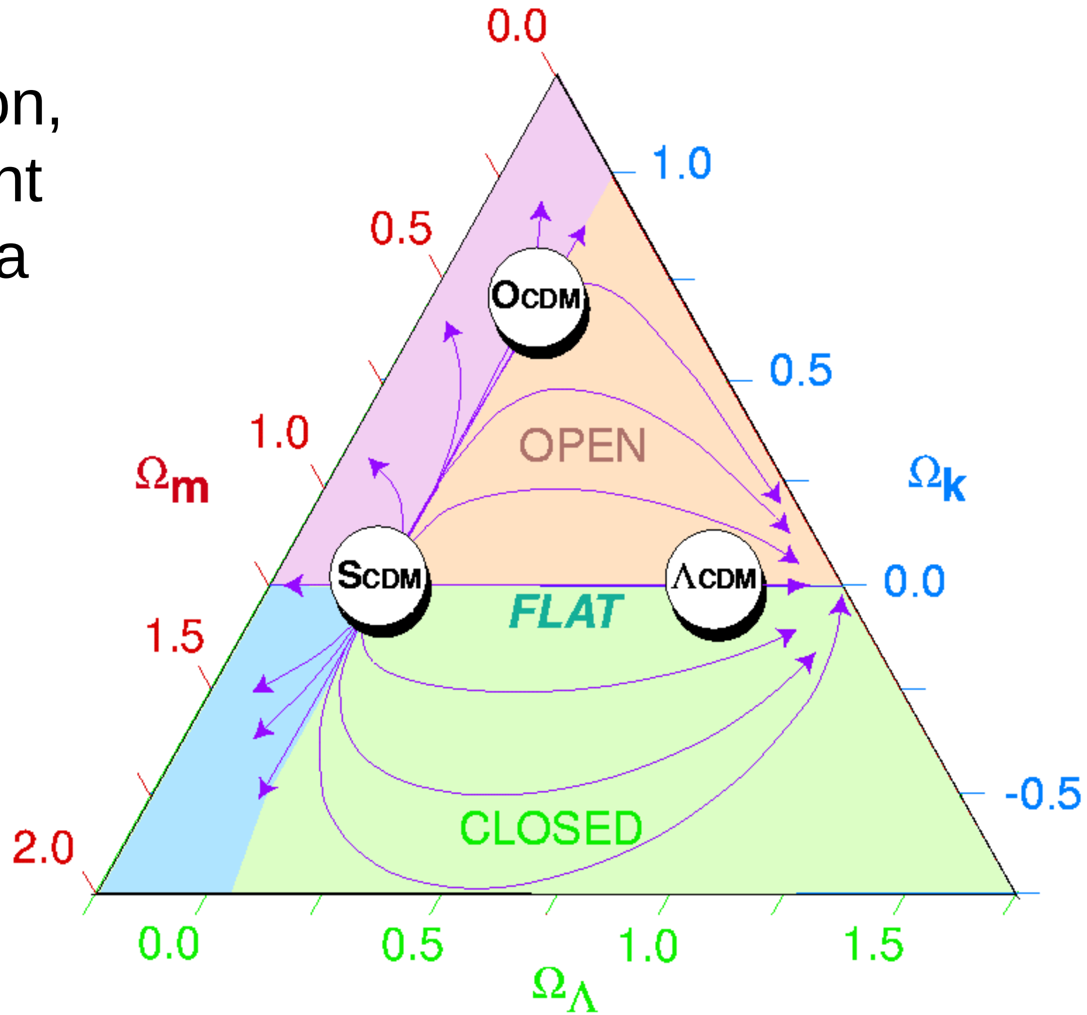
$$z_{eq} = 4.2 \times 10^{4}\Omega_0 h^{2}$$



Matter
Radiation
a_{eq}
Cosmological Constant (Λ)
10
5
0
10^{-4}
10^{-3}
0.01
0.1
1
Scale Factor a(t)
$\log_{10}[\rho(t)/\rho_{cr}]$

Le triangle cosmique

A ce niveau de description, seuls 4 nombres semblent nécessaires pour décrir la dynamique de l'univers...



Dynamique des univers FLRW (1)

Comme premier exemple, considerons un univers dominé par de la matière.

$$\rho = \rho_0 a^{-3}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = C\, a^{-3} \Longrightarrow \int \sqrt{a}\, da = \int \sqrt{C}\, dt$$

$$\boxed{a(t) \propto t^{2/3}}$$

Dynamique des univers FLRW (2)

Je vous laisse rapidement faire le cas d' un univers dominé par de la radiation.

$$\rho = \rho_0 a^{-4}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = C\, a^{-4} \quad \Longrightarrow \quad a\,da = \sqrt{C}\,dt$$

$$\boxed{a(t) \propto t^{1/2}}$$

Dynamique des univers FLRW (3)

Pour finir, considerons le cas d'un univers dominé par une constante cosmologique.

$$\rho = \rho_0$$

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = C \quad \Longrightarrow \quad da/a = \sqrt{C}\,dt$$

$$\boxed{a(t) \propto \exp \sqrt{C}\,t}$$

Age de l'univers

$$dt = \frac{da}{\dot{a}} = \frac{da}{aH(a)} \longrightarrow t_0 = \int_0^{t_0} dt = \frac{1}{H_0}\int_0^1 \frac{da}{aE(a)}$$

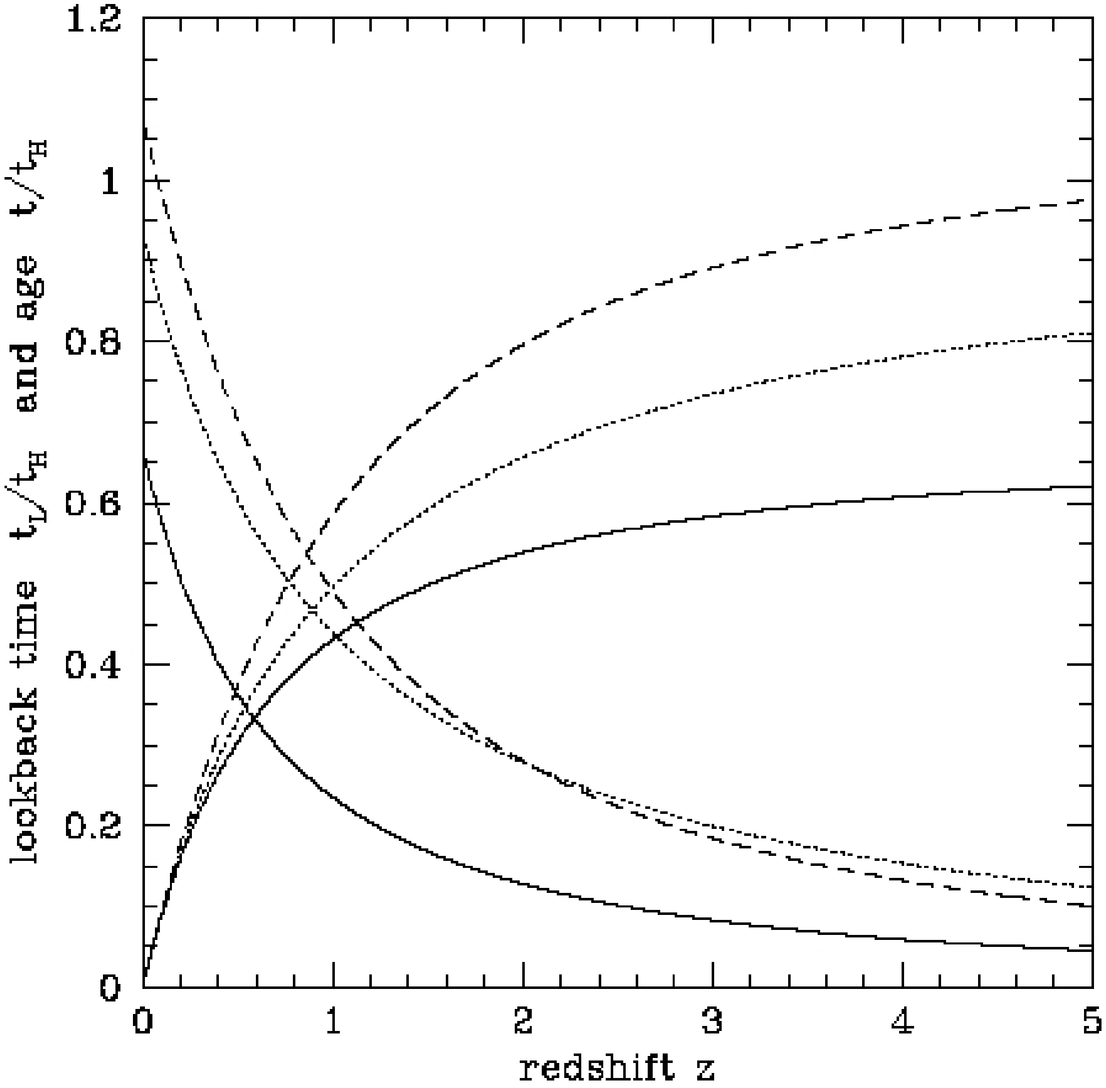
$$t_0 = \frac{1}{H_0}\int_0^1 \frac{dz}{(1+z)E(z)}$$

Le temps de « regard en arrière » est la différence entre l'âge de l'univers aujourd'hui et l'âge de l'univers au moment où le photon a été émis

$$\Delta t(a_{\tilde{a}}) = t_0 - t(a_{\tilde{a}}) = \frac{1}{H_0}\int_{a_{\tilde{a}}}^1 \frac{da}{aE(a)}$$

$$\Delta t(z_{\tilde{a}}) = \frac{1}{H_0}\int_0^{z_{\tilde{a}}} \frac{dz}{(1+z)E(z)}$$

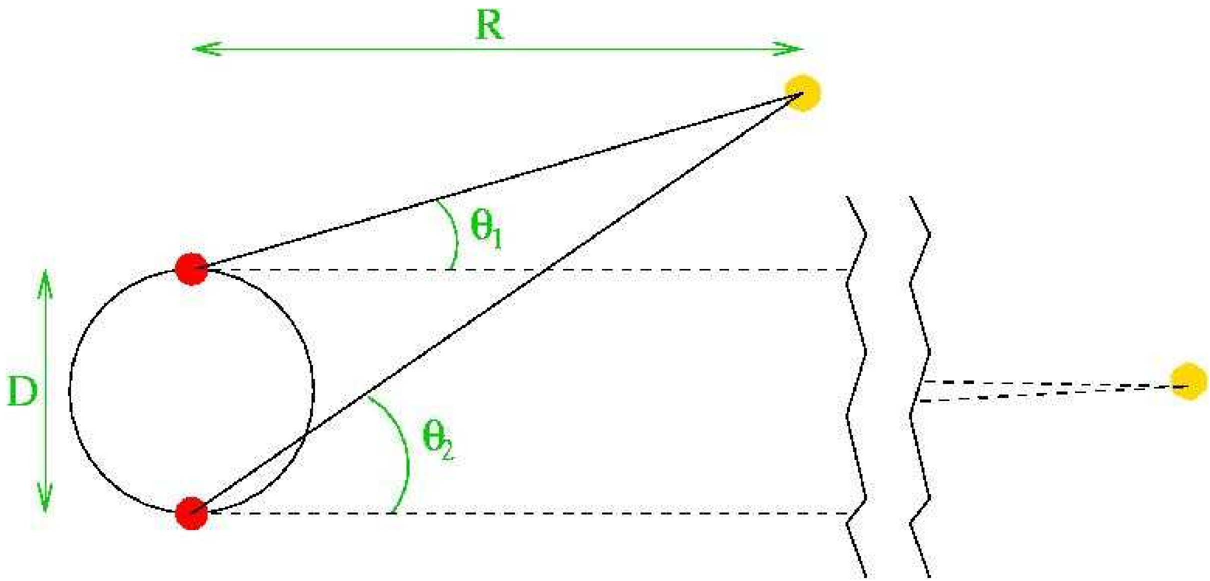
$(\Omega_M,\Omega_\Lambda)$=(1,0) [___]; (0.05,0) [...]; (0.2,0.8) [--]



Distances : un choix difficile

Méthode des parallaxes

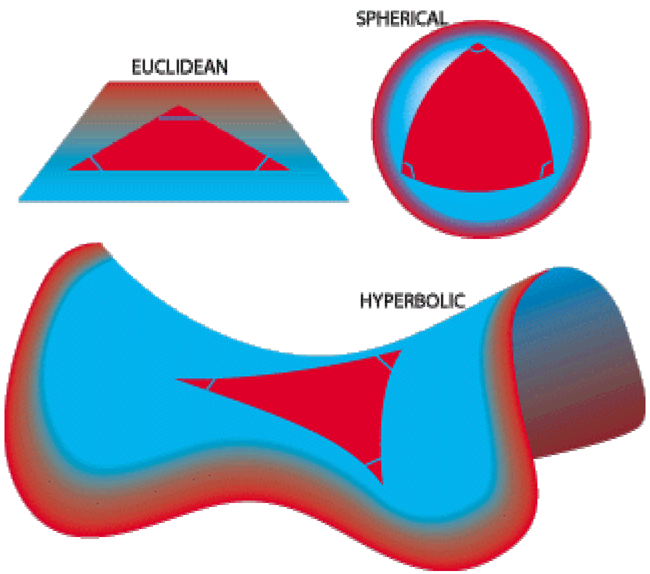
Pour des objets proches, on peut utiliser cette méthode



$$R \simeq \frac{D}{\theta_1 - \theta_2}$$

Comment généraliser cela aux échelles cosmologiques?

Courbure et métrique



$$d\grave{}^{2} = d\ddot{y}^{2} + f_K^{2}(\ddot{y})d\grave{O}^{2}$$

$$K = \frac{k}{R_c^2}$$

$$R_c = \frac{c}{H_0}\,\mathrm{p}\,\frac{1}{j\grave{O}_K j}$$

$$K > 0: \qquad f_K = R_c \sin(\ddot{y} {=} R_c)$$

$$K = 0: \qquad f_K = \ddot{y}$$

$$K < 0: \qquad f_K = R_c \sinh(\ddot{y} {=} R_c)$$

Distance radiale comobile

En partant de $$d\chi = \frac{dt}{a} = \frac{da}{a^2 H(a)}$$

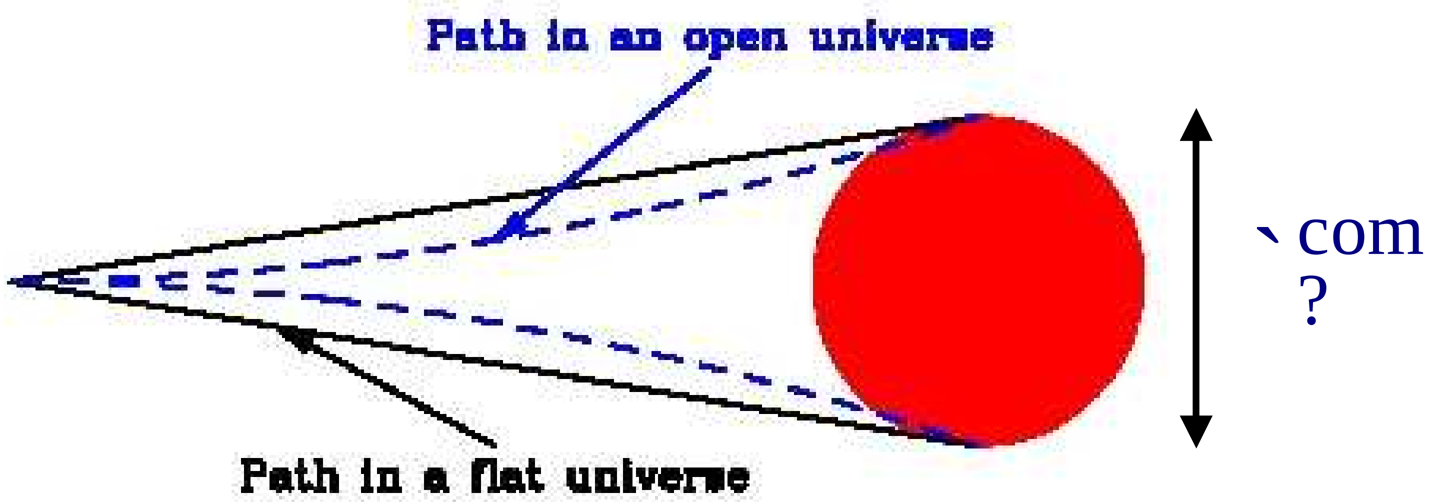
on déduit $$\chi(z) = \frac{1}{H_0}\int_0^z \frac{dz}{E(z)}$$

Cette quantité est fondamentale: toutes les autres distances s’exprimeront en fonction d’elle.

Application: Ω=1 (K=0), Λ=0, matière

$$\chi(z) = \frac{2}{H_0}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+z}}\right]$$

Diamètre angulaire



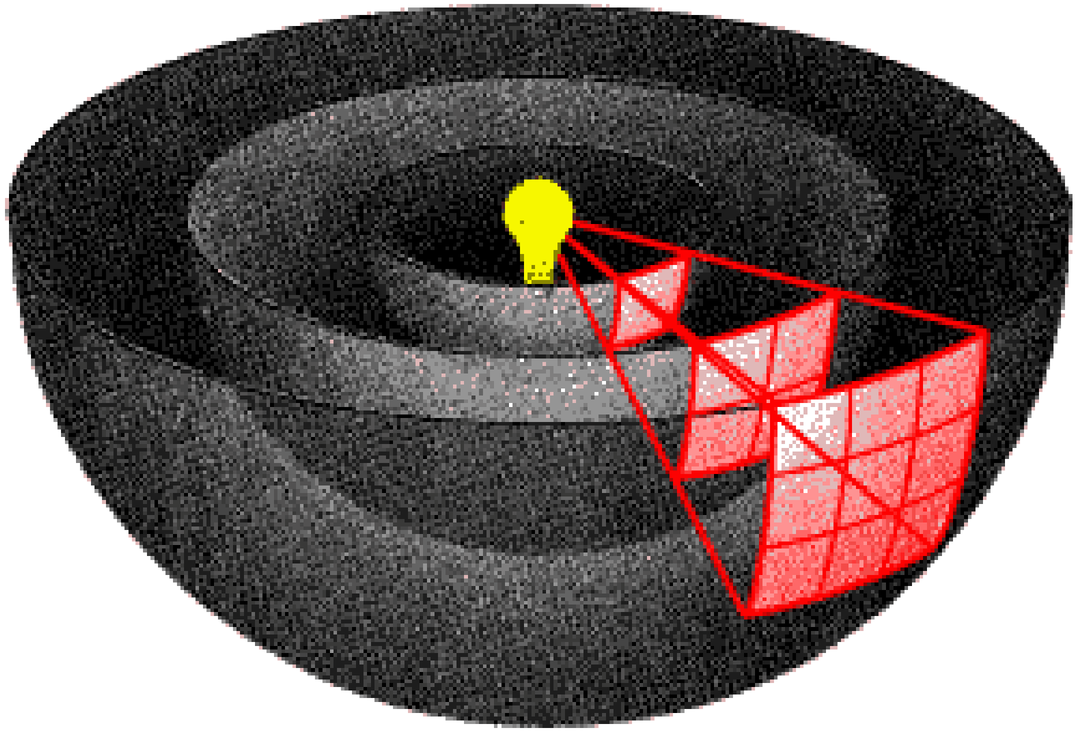
$$\grave{}^{\mathrm{com}}_{?} = f_K(\ddot{y})\grave{o}$$

Application: cas plat

$$\theta(z) = \frac{\ell_{com}}{\chi(z)} \qquad \theta(z) = \frac{\ell_{phys}}{a\chi(z)}$$

$$\theta(z) = \frac{\ell_{phys} H_0 (1+z)^{3/2}}{2\left(\sqrt{1+z} - 1\right)}$$

Distance luminosité (1)



$$þ_{obs} = \frac{L_{source}}{4ù D_L^2}$$

Distance luminosité (2)

La luminosité de la source est donnée par

$$L_{source} = \delta E_{em} / \delta t_{em}$$

La surface de la sphere centrée sur la source est

$$S(\chi) = 4\pi f_K^2(\chi) a_0^2$$

L'énergie et le temps de réception des photons sont

$$E_{obs} = E_{em} a(t_{em}) \qquad \delta t_{obs} = \delta t_{em} / a(t_{em})$$

D'où

$$\boxed{D_L(z) = (1 + z) f_K(\chi(z))}$$

Distance luminosité (3)

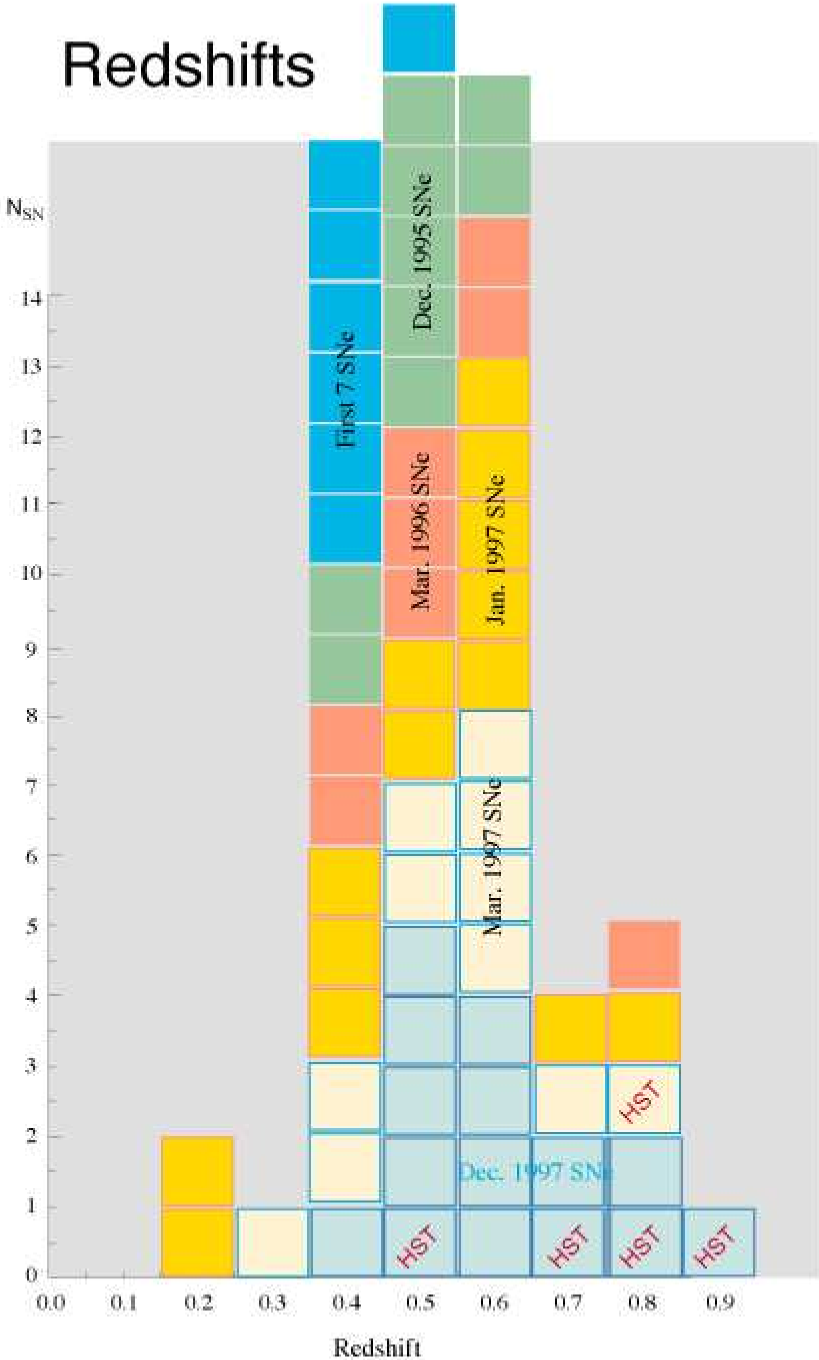
On a une expression pou DL(z) mais la luminosité de la source est inconnue

$$\frac{D_L^2}{D_L^2(z\text{ã})} = \frac{L}{L\text{ã}}\ \text{â}\ \frac{\text{þã}}{\text{þ}}$$

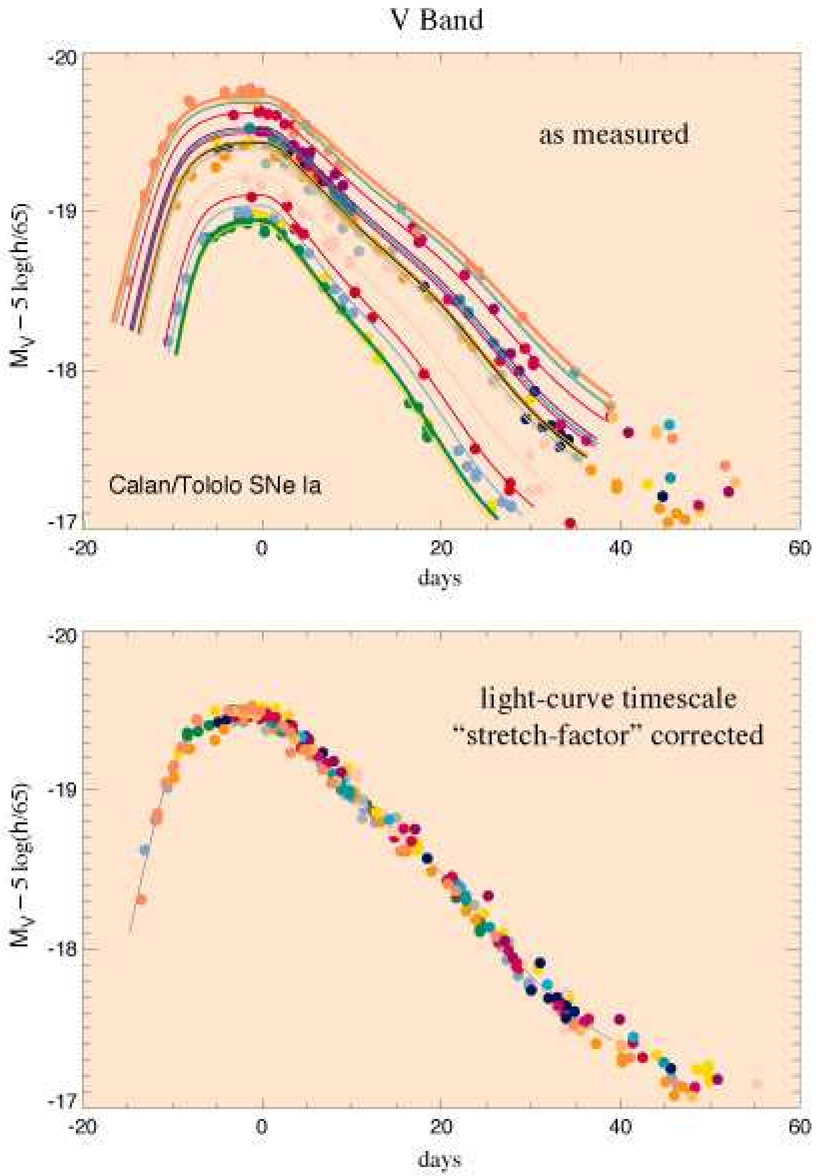
Avec une chandelle standard, on peut calibrer toutes les distances

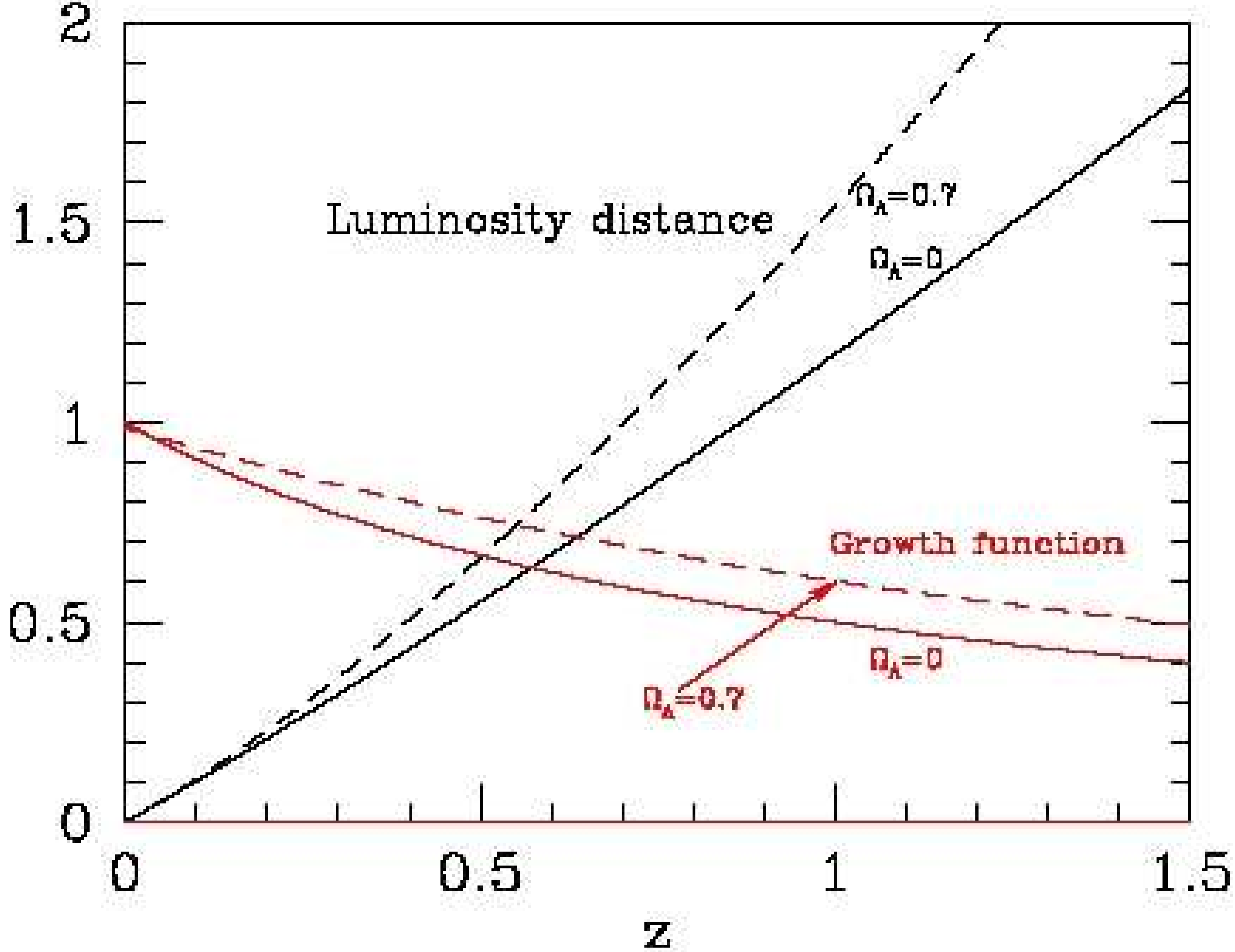
Supernovae Ia

Redshifts



Low Redshift Type Ia Template Lightcurves





2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
z
Luminosity distance
Ω_Λ=0.7
Ω_Λ=0
Growth function
Ω_Λ=0
Ω_Λ=0.7

Distance angulaire

C’est la notion qui généralise celle de parallaxe.

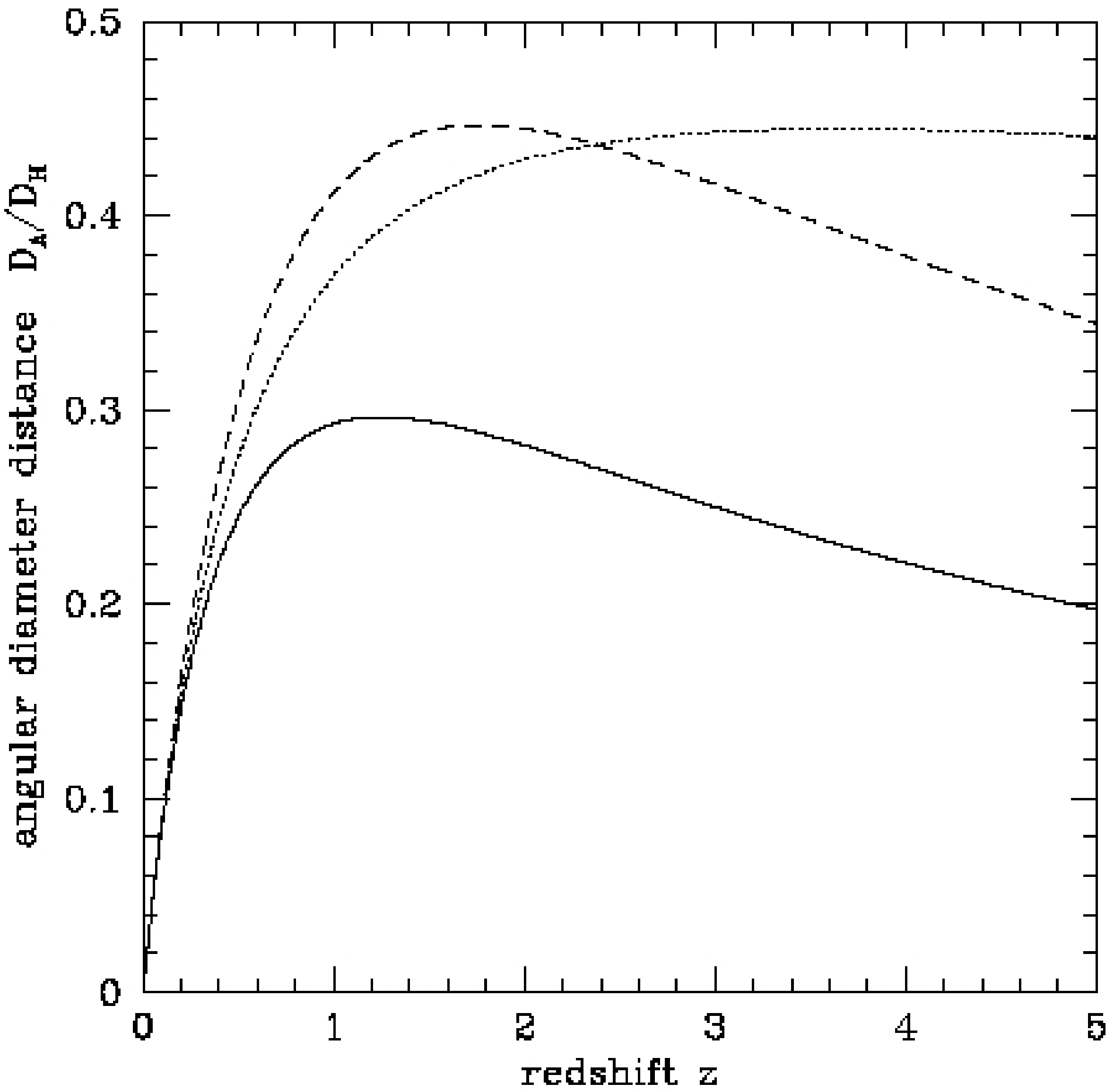
C’est le rapport entre la taille (physique) transverse d’un objet par son diamètre angulaire

$$\text{É ò} = \frac{\text{ˋ}_{phys}}{D_A} \qquad\qquad \text{É ò} = \frac{\text{ˋ}_{com}}{f_K(\text{ÿ})} = \frac{\text{ˋ}_{phys}}{a f_K(\text{ÿ})}$$

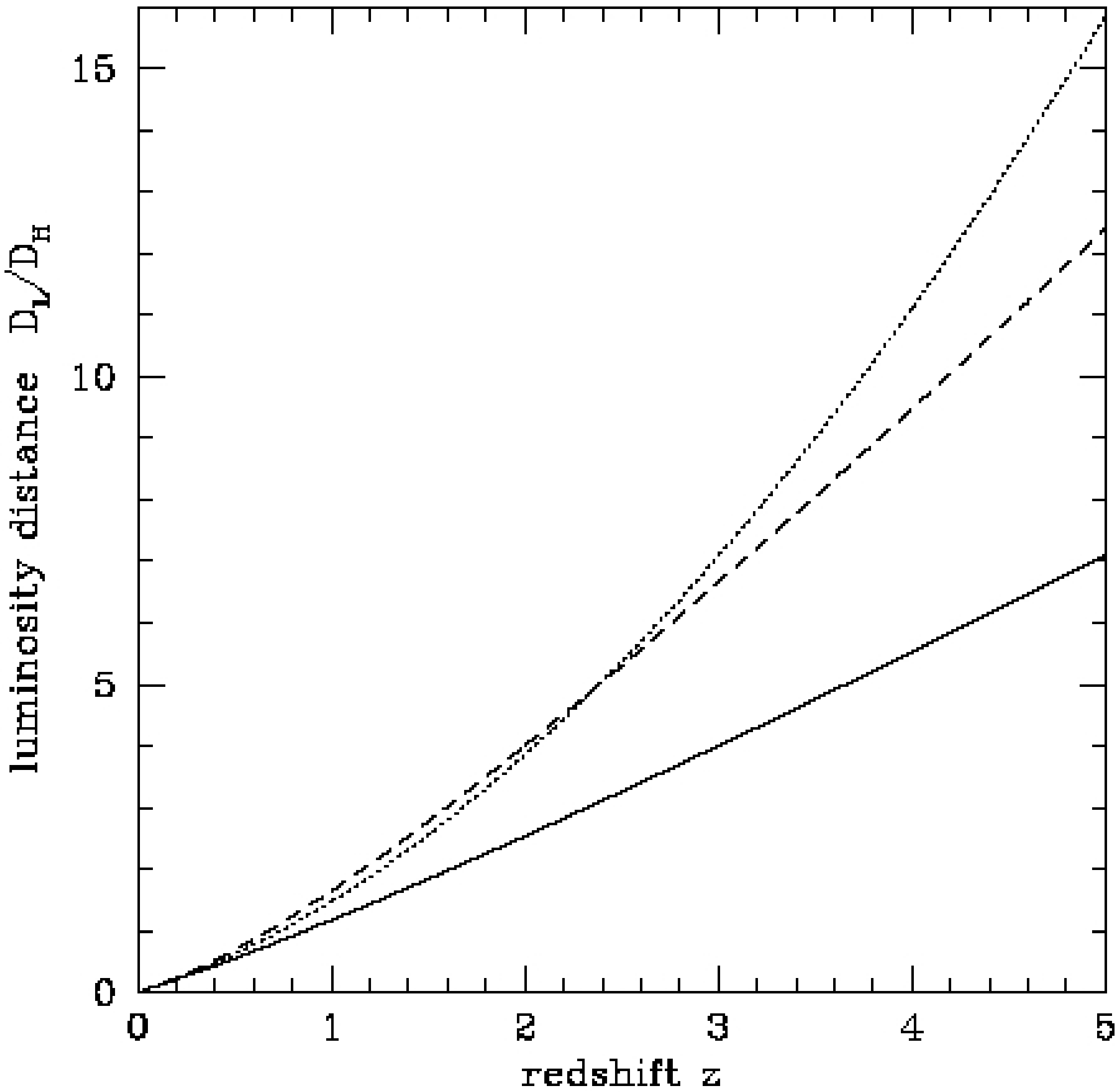
D’où

$$\boxed{D_A(z) = \frac{f_K(\text{ÿ}(z))}{(1+z)}}$$

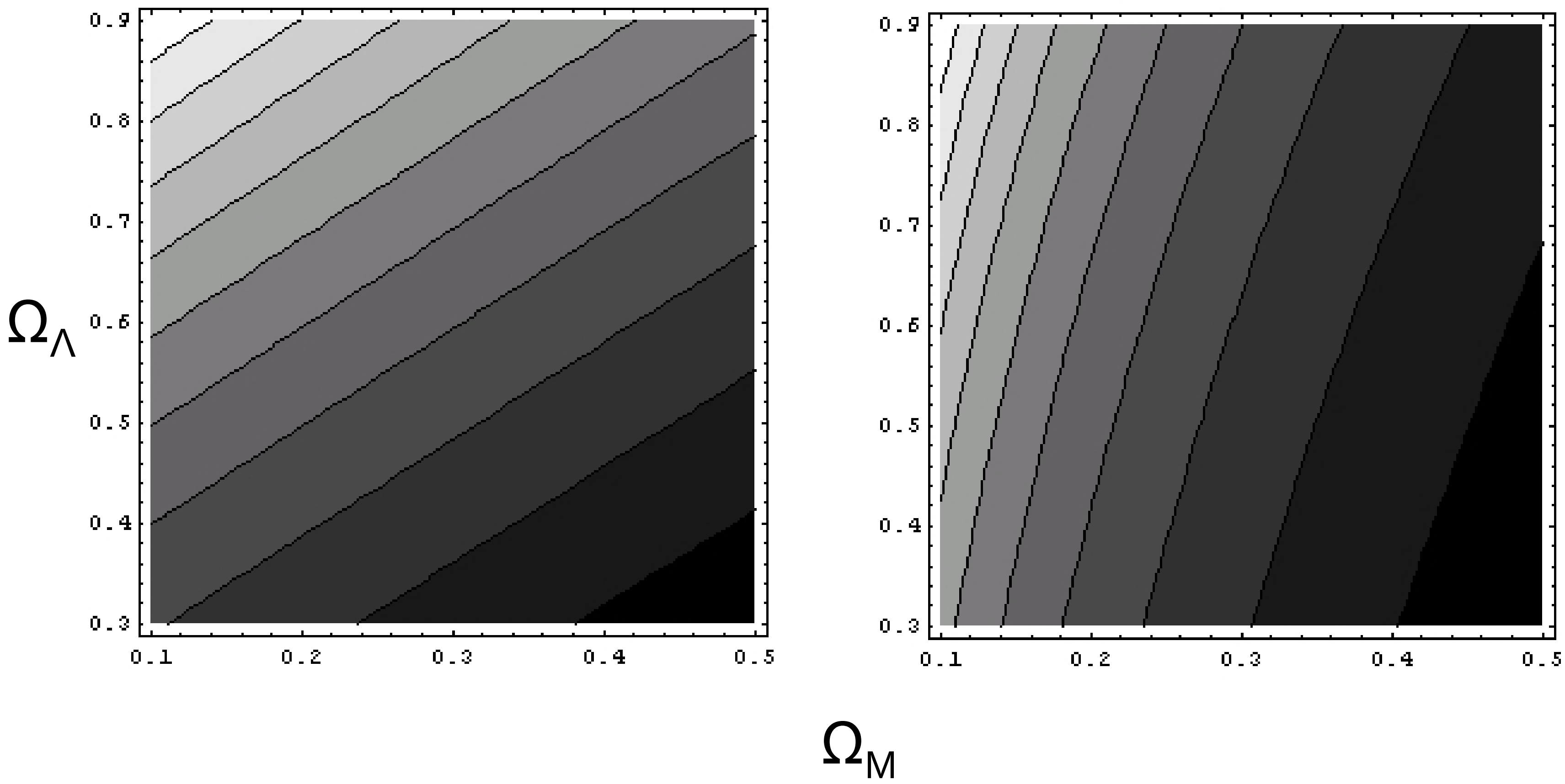
$(\Omega_M,\Omega_\Lambda)$=(1,0) [__]; (0.05,0) [...]; (0.2,0.8) [--]



$(\Omega_M,\Omega_\Lambda)$=(1,0) [___]; (0.05,0) [...]; (0.2,0.8) [--]

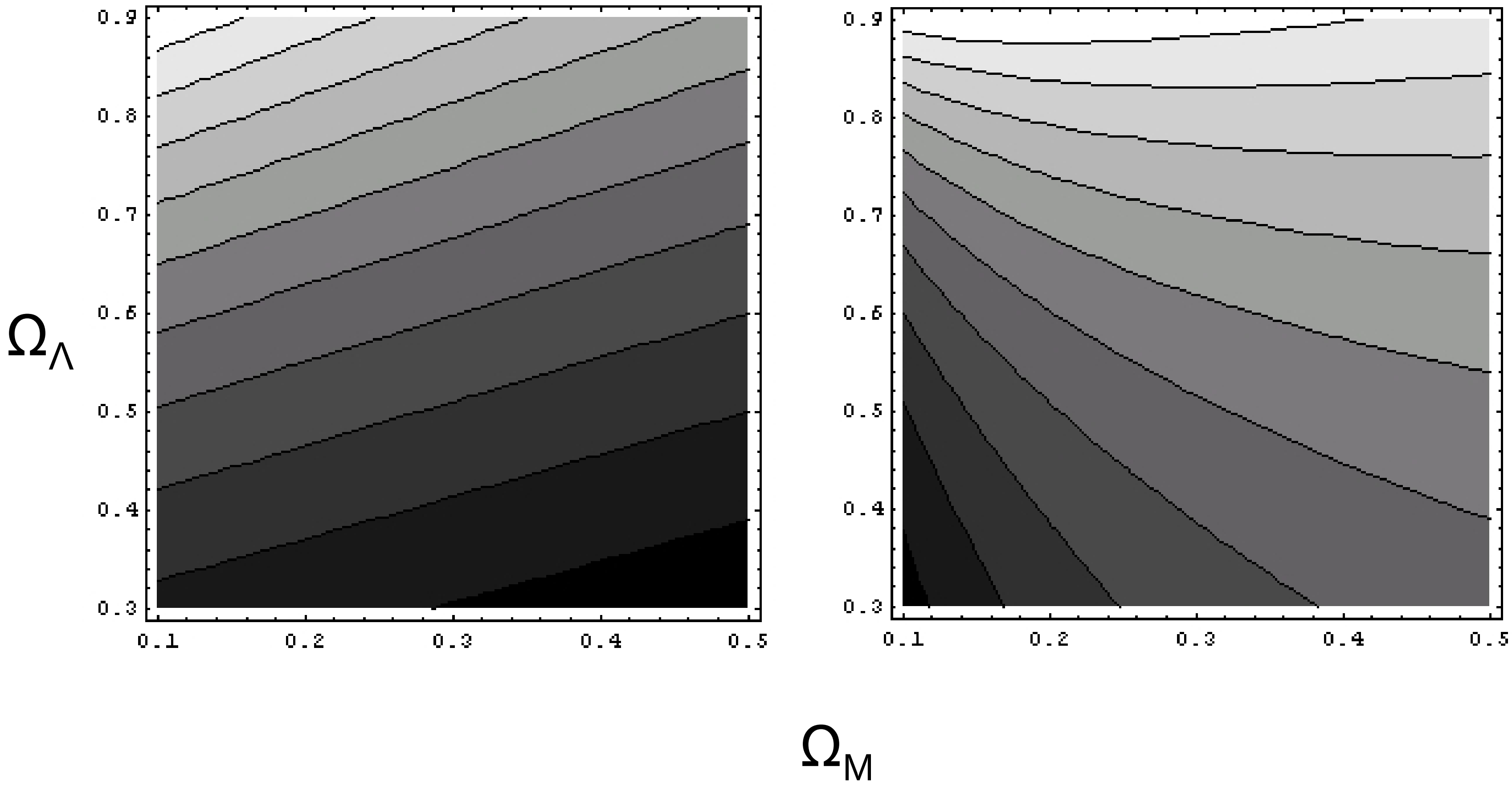


Dégénérecences: $\chi(z)$



Z=1 Z=1000

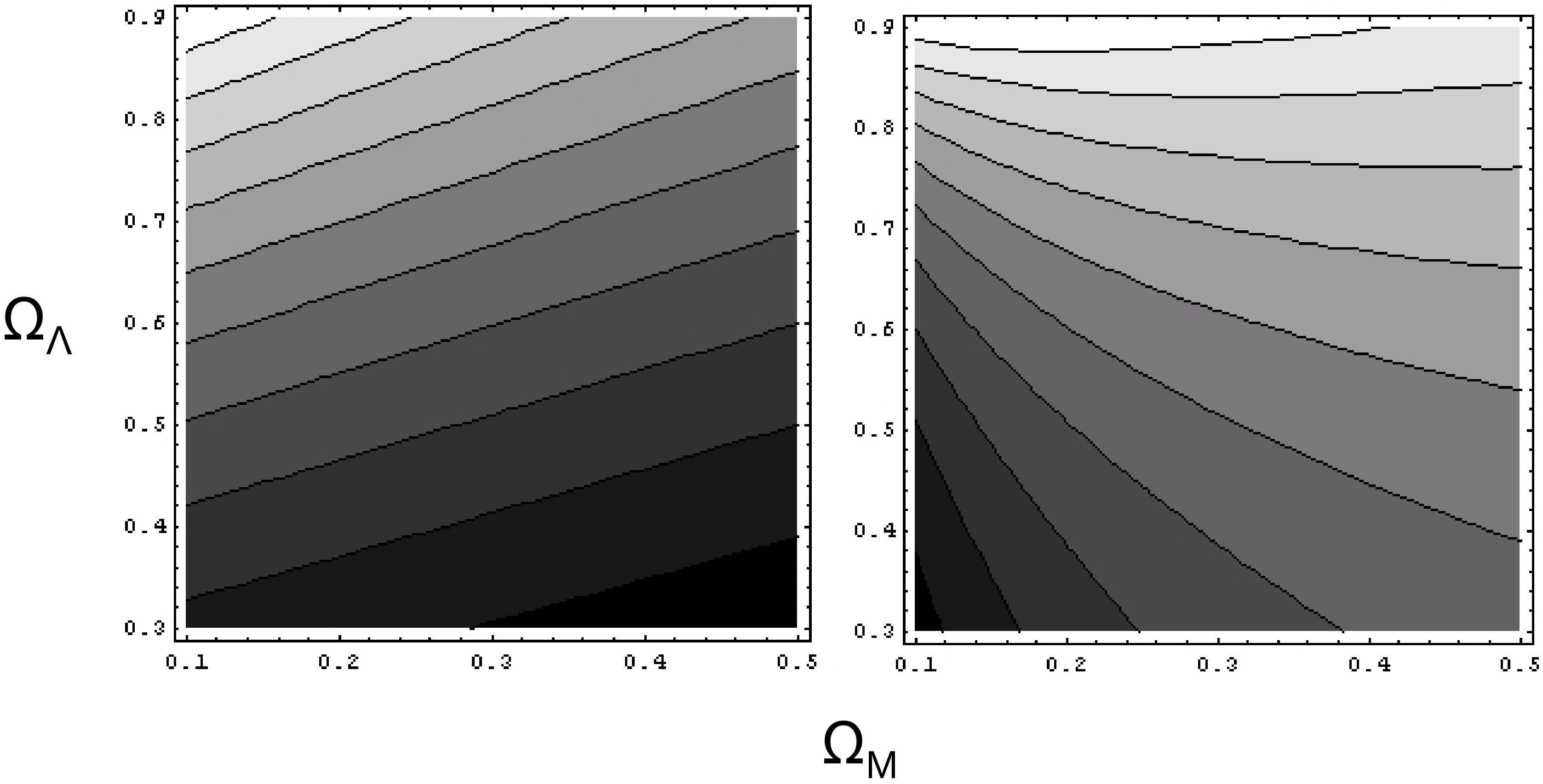
Dégénérecences: $D_L(z)$



Z=1

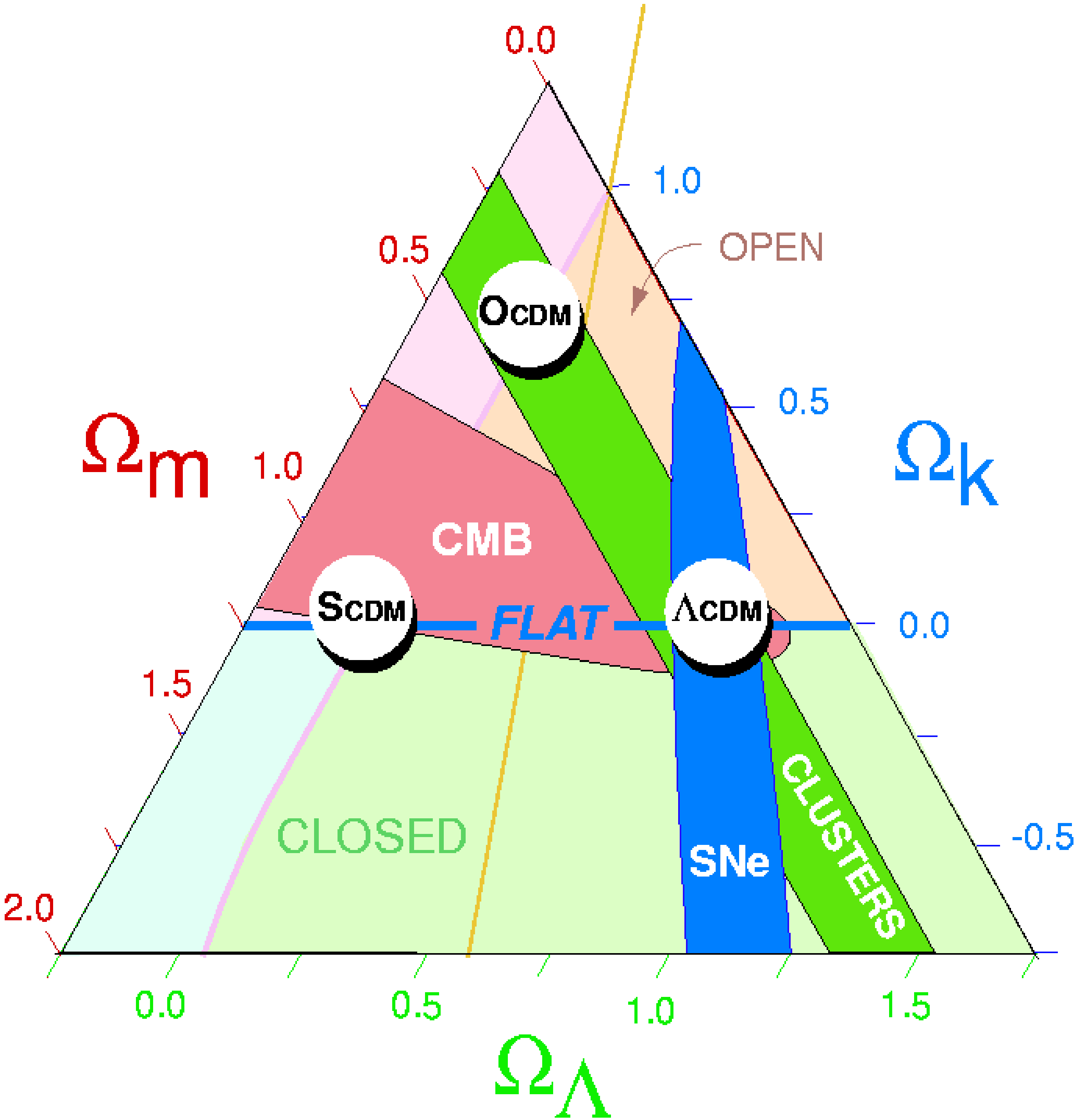
Z=1000

Dégénérecences: $D_A(z)$



Z=1

Z=1000



0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
Ω_m
1.0
0.5
0.0
-0.5
Ω_k
0.0
0.5
1.0
1.5
Ω_Λ
OPEN
OCDM
CMB
SCDM
FLAT
ΛCDM
CLOSED
SNe
CLUSTERS